MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez-Marcelo Navarro

Continuidad vs Continuidad Uniforme en x^2

1. Introducción

Estimados y estimadas esta guía está hecha para poder interiorizar más el concepto a debatir, en un comienzo debemos saber que es cada concepto, ya sea gráficamente y de forma matemática. Les recomiendo lo siguiente:

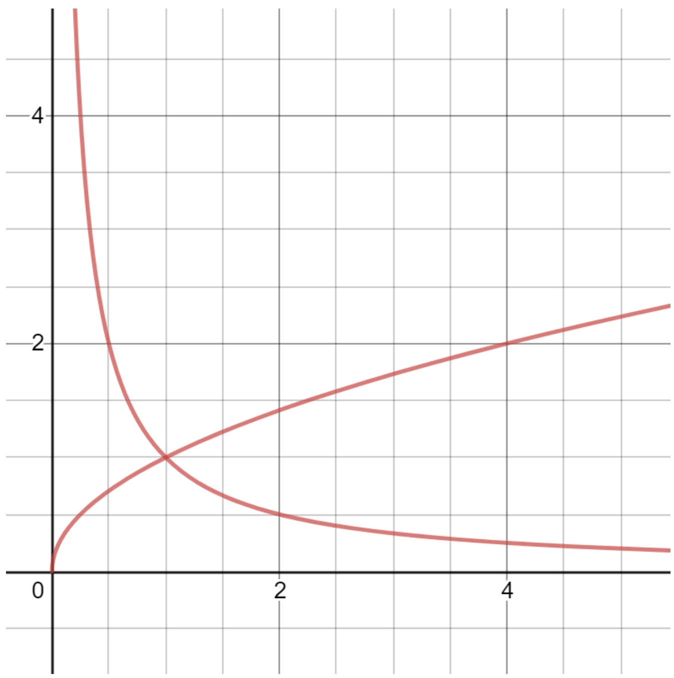
1. Vayan dibujando cada paso, y lean esto calmada y lentamente.
2. Ante cualquier duda preguntar!, este es uno de los conceptos más densos del curso y que deben tener al revés y al derecho.
3. Después de esto, las funciones del tipo Lipschitz que vimos en clases serán un paseo!.
4. Aparecerán unas ensaladas de proposiciones como la caracterización de continuidad, vía $\varepsilon - \delta$ entre otras, les recomiendo anotar todo como lo hacíamos en Introducción al álgebra con proposiciones lógicas con cuantificadores, y entenderlas de dicha manera.
5. Ir enumerando las hipótesis que tenga, además de interpretando las desigualdades gráficamente
6. La idea es no quedarse pegado en matraca, así que para todos los desarrollos fui comentando al lado o después los desarrollos usados!
7. Motivarse porque está denso pero wueno wueno! RECUERDEN IMAGINACIÓN.

La diferencia gráfica en palabras simples de continuidad y continuidad uniforme, es que la primera es dibujar el grafo(curva de la función) 'Sin levantar el lápiz', lo cual es poco preciso pero sirve, luego la continuidad uniforme es como úna función que es continua pero ño puede explotar', esto es muy burdo, pero lo que nos interesa es dicha interpretación, además:

1. Toda función uniforme continua es continua.
2. **NO** toda función continua es uniforme continua.

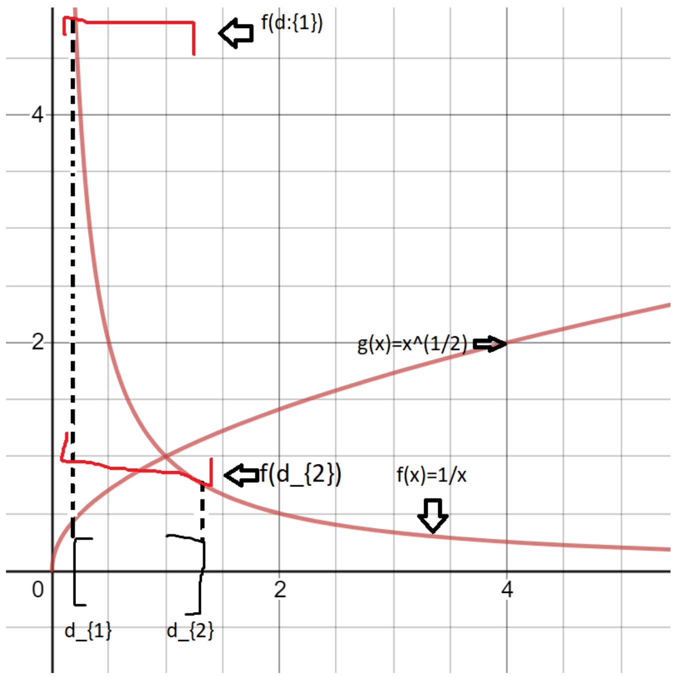
¿Cómo podemos interpretar esto de manera más práctica?, puede verse como si me tomo un ancho en el dominio de la función, lo que ocurre es que la diferencia entre sus imágenes no aumenta de manera drástica.

Espero esto haya sido de ayuda, si no lo podemos dibujar!!!!**usaremos como dato que claro $f(x) = 1/x$ en su dominio no es uniforme continua pero si continua, además que $g(x) = \sqrt{x}$ si lo es!**



Pero bien ahora veamos que en la siguiente imagen ocurre que, claro se define un $d : 1$ y d_2 parte del dominio de $f(x) = 1/x$, y lo que queremos estudiar son la diferencia de las imágenes, es decir, $|f(d_1) - f(d_2)|$ esta diferencia es representable gráficamente como se puede ver. Pero podemos intuir algo que ocurre, vamos a aquello!! si me voy acercando con d_1 hacia 0 la imagen, es decir, $f(d_1) \to \infty$, entonces para d_2 esta diferencia se dispararía o aumentaría drásticamente!, como se ve representado en la siguiente figura.(recordar que esta **NO** es uniforme continua)
Lo que estamos diciendo realmente es que cuando una función no es uniforme continua depende del punto donde estoy situado, por su defecto!

Por otro lado la función $g(x) = \sqrt{x}$ si vamos realizando el mismo proceso la diferencia delas imágenes se mantiene controlada.(recordar que esta es uniformemente continua en todo su dominio).
Acabamos de mencionar algo, todo su dominio, entonces sabemos que no explotará la diferencia de las imágenes, por lo que decimos que una función es uniforme continua sin importar el punto del dominio que tome!!



Perdón por el paint!!Ahora sigamos con el estudio de estas continuidades!

2. Objetivo

Entender la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme, mediante el ejemplo de $f(x) = x^2$ que es continua en todo $\mathbb{R}$ pero no es uniformemente continua.

Antes de leer todo esto les recomiendo ver las siguientes discusiones sobre el tema de continuidad uniforme, en particular ver las dos primeras respuestas de cada pregunta

- Cual es la diferencia geometrica entre continuidad y continuidad uniforme?
- Continuidad uniforme en $\frac{1}{x}$

Pd:Esto es si tienen buen ingles, si no busquen alguien que les ayude a traducir, ustedes pongan la matemática y ellos la traducción.
Yo intenté con toda mi alma traducirlo, pero se me fue en coyera olímpicamente, lo intenté por mucho rato pero falló el plan, así que sorry ;(, pero véanlo están muy bueno, sigamos en lo que estábamos!!

3. Continuidad

Veamos primero que $f(x) = x^2$ es continua en 1, para luego generalizar sobre un $\overline{x} \in \mathbb{R}$ cualquiera.

3.1. Continuidad en 1

Debemos demostrar que $f(x) = x^2$ es continua en 1, notando que $f(1) = 1^2 = 1$.
La proposición, en su forma general, que queremos estudiar es la siguiente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon$$

Donde se tiene que $\overline{x}$ es el punto donde estudiaremos la continuidad, en este caso $\overline{x} = 1$. Para trabajar mejor todo esto, empezaremos a buscar en la tesis de la implicancia candidatos o posibles valores para δ.
Empecemos:

PDQ: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ es continua en 1. Es decir...

$\Leftrightarrow$ PDQ: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - 1| \leq \varepsilon$

Esto es por definición de continuidad en un punto, vía $\varepsilon - \delta$
[Idea] Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario (con esto cubrimos $\forall \varepsilon > 0$ de lo que debemos probar).lo subrayado.
$\underline{\forall \varepsilon > 0}, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - 1| \leq \varepsilon$
Notemos que por diferencia de cuadrados.

$$|x^2 - 1| = |(x - 1)(x + 1)|$$

Lo que queremos, es encontrar cotas(una expresión que sea mayor a lo dicho) para llegar a decir

$$|x^2 - 1| = |(x - 1)(x + 1)| \leq \underbrace{\ldots}_{\text{cota}} \leq \underbrace{\ldots}_{\text{cota}} \leq \underbrace{\varepsilon}_{\text{objetivo}}$$

Esto lo podemos lograr con ayuda de que eventualmente nosotros sabremos que hay un $\delta > 0$ tal que $|x - 1| \leq \delta$, por lo que podremos usar esto como información anticipada (pues nosotros queremos encontrar el δ, no ocuparlo) para generar cotas.
Sigamos ahora con las dos etapas que hemos mencionado hasta ahora.

- Etapa 1): La idea expresar $|x^2 - 1| = |x - 1| \cdot g(x)$ donde $|x - 1|$ es la expresión que sale en la hipótesis de la implicancia a demostrar ($|x - 1| \leq \delta$). Para luego usando cotas, eliminar de la expresión el valor de $g(x)$ usando algún valor $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 1| \leq \delta \leq c_1$.

- Etapa 2): La idea es continuar acotando. Por la etapa 1, nosotros esperamos lograr que $|x^2 - 1| = |x - 1|g(x) \leq |x - 1| \cdot c_2$, donde c_2 es una constante que nos sirvió para acotar. luego de aqui decir que $\delta = \frac{\varepsilon}{c_2}$(conveniencia, lo que hicimos en el auxiliar! volver y es lo que quería) y finalmente concluir con $\delta = min\{c_1, \frac{\varepsilon}{c_2}\}$ es el mínimo para que cumpla ambas condiciones simultánealente!

Notar que a lo largo de todo esto $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario, pues no ocupamos ninguna particularidad de él, solo que $|x-1| \leq \delta$

Apliquemos esto de manera formal. Volvamos al principio y empecemos todo de nuevo ahora que ya tenemos un poco más claro todo.

PDQ: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq \delta \Rightarrow |x^2-1| \leq \varepsilon$

Demostración. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, notemos que

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1|\underbrace{|x+1|}_{g(x)} \tag{1}$$

(diferencia de cuadrados y luego defino $g(x)$)

Luego, si $\delta \leq 1$ (a mi me dio la gana poner este 1 de acá, perfectamente pueden elegir otro porque es arbitrario!). Tenemos que $|x-1| \leq 1$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |x-1| \leq 1 &\Longleftrightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 && / + 2 \\ &\Longleftrightarrow (-1)+2 \leq (x-1)+2 \leq (1)+2 \\ &\Longleftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 3 \\ &\Longrightarrow |x+1| \leq 3 \end{aligned}$$

Donde en un comienzo se usó definición de valor absoluto, luego se sumó 2 preservando la desigualdad a la suma, donde después claro si alguien está en $y \in [-1,3]$ en particular estará en $[-3,3]$ pues el primero es subconjunto del segundo conjunto, Luego encontramos una cota fija para $|x+1|$ por lo que volviendo a (1) se tendrá:

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1| \leq |x-1| \cdot 3 \tag{2}$$

Acá ocupamos la cota que acabamos de encontrar en la parte anterior. *(recuerdo: queríamos que $|x^2-1|$ fuera menor que épsilon)*

Ahora bien, si $|x-1| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ se tendrá que

$$|x^2-1| = |(x-1)(x+1)| = |x-1||x+1| \leq |x-1| \cdot 3 \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = \underbrace{\varepsilon}_{\text{objetivo } \checkmark} \tag{3}$$

Comenzamos de este $\frac{\varepsilon}{3}$ por conveniencia de llegar al ε como dice el **recuerdo:**
Finalmente $f(x) = x^2$ es continua en 1, ya que, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = min\{1, \dfrac{\varepsilon}{3}\}$
Donde se toma el mínimo para que se cumplan ambas condiciones simultáneamente, con el δ dado arbitrario, el que le adjudicamos el valor de 1 y el otro. ☐

Si quedaron dudas, revisen lo siguiente ¿como muestro que $f(x) = x^2$ es continua en 1?

3.2. Continuidad en cualquier punto

Ahora probemos que $f(x) = x^2$ es continua en un $\overline{x} \in \mathbb{R}$ arbitrario.
Esta es la parte donde aplican las recomendaciones de escribir como intro al álgebra! proposiciones lógicas con cuantificadores compuestos.

PDQ: Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}$ arbitrario. Demostrar que $f(x) = x^2$ es continua en $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Es decir, probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - \overline{x}^2| \leq \varepsilon$

Demostración. Sigamos la misma idea anterior. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Notemos que: (Primero diferencia de cuadrado, donde luego hace un nikita-nipone para poder terminar con una desigualdad triangular junto a transitividad de la desigualdad)

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x - \overline{x}| \cdot |x + \overline{x}|$$

Si $\delta \leq 1$ y notando que $|x + \overline{x}| = |(x - \overline{x}) + 2\overline{x}| \leq \underbrace{|x - \overline{x}|}_{\leq \delta} + |2\overline{x}|$ lo que implica que $|x + \overline{x}| \leq 1 + 2|\overline{x}|$.

Volviendo atrás.

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x - \overline{x}| \cdot |x + \overline{x}| \leq |x - \overline{x}| \cdot (1 + 2|\overline{x}|)$$

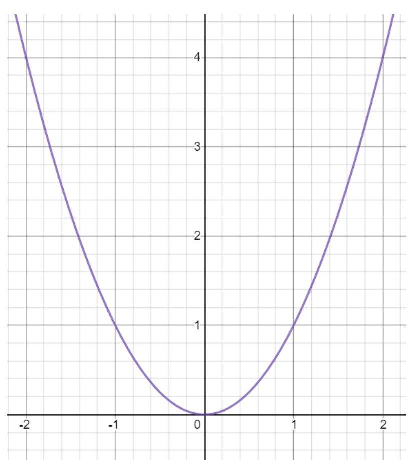
Si tomamos que $|x - \overline{x}| \leq \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|\overline{x}|}$ se tiene que

$$|x^2 - \overline{x}^2| = |x - \overline{x}| \cdot |x + \overline{x}| \leq |x - \overline{x}| \cdot (1 + 2|\overline{x}|) \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{1 + 2|\overline{x}|}} \cdot \cancel{(1 + 2|\overline{x}|)} = \varepsilon$$

Finalmente $f(x) = x^2$ es continua en cualquier punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$, ya que, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar $\delta = min\{1, \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|\overline{x}|}\}$

□

Notar que δ depende del $\overline{x}$ y del ε. Esto hace pensar que la *fuerza* de la continuidad de $f(x) = x^2$ depende netamente del punto $\overline{x}$, esto jamás pasa cuando una función es continuamente uniforme.



Podemos ver que claro la función se va a los infinitos, de hecho como vimos en clase, tiene un carácter de coersiva!(Que cuando tomo límite al $\pm\infty$ la función se va ∞). Entonces se comporta como $\frac{1}{x}$ cuando se acerca a 0.

3.3. Continuidad Uniforme

Debemos probar que no se cumple que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Es decir, la gran diferencia con la continuidad normal es que δ en la continuidad uniforme NO DEPENDE DE DONDE ESTOY PARADO, es decir, NO DEPENDE NI DE x NI DE y.

Pueden notar que cuando uno habla de continuidad uniforme debe ser sobre un conjunto! (esto lo indica $\forall x, y \in \mathbb{R}$) a diferencia de la simple continuidad que puede ser sobre un punto.

Otra cosa que es posible notar, es que en la sección 2.2 la continuidad en $\overline{x}$ tenia ligado un δ que dependía de ε y en particular de $\overline{x}$. por lo que la intuición nos dice que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Dicho todo esto, probemos que no se cumple la continuidad uniforme, es decir debemos probar que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

o bien debemos realizar una contradicción con

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Demostración. Supongamos en busca de una contradicción que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua, es decir nuestra información es que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Luego, como sirve para todo ε, podemos tomar $\varepsilon = 1$, como tomamos un valor de ε y supusimos que la proposición es cierta, entonces debe existir $\delta > 0$ (en este momento δ es un valor que podemos manejar) tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x-y| \leq \delta \implies |x^2 - y^2| \leq 1$.

En particular, para $y = x + \delta$ tenemos que $|x^2 - (x+\delta)^2| = |2x\delta + \delta^2| \leq 1$ para todo valor de x en $\mathbb{R}$. esto es una contradicción pues podemos tomar x enorme y la cota de ≤ 1 no serviría. por ejemplo podemos tomar $x = \dfrac{e^{e^{10}}}{\delta} - \dfrac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned}
|2x\delta + \delta^2| &= |2 \cdot (\frac{e^{e^{10}}}{\delta} - \frac{\delta}{2}) \cdot \delta + \delta^2| \\
&= |2 \cdot \frac{e^{e^{10}}}{\cancel{\delta}} \cdot \cancel{\delta} - \cancel{2} \cdot \frac{\delta}{\cancel{2}} \cdot \delta + \delta^2| \\
&= |2 \cdot e^{e^{10}} - \delta^2 + \delta^2| \\
&= |2 \cdot e^{e^{10}}| \\
&\not\leq 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos una contradicción y con ello x^2 no es uniformemente continua

□

Actualización: revisar ¿Hay alguna otra forma de demostrar continuidad uniforme?

Ahora demostremos de otra forma que x^2 no es uniformemente continua, usando sucesiones. para esto veamos lo siguiente

Lema 1. ***(Caract. continuidad uniforme)***

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es uniformemente continua en A si y sólo si

$$\forall (x_n), (y_n) \subseteq A, |x_n - y_n| \to 0 \implies |f(x_n) - f(y_n)| \to 0$$

Donde (x_n) y (y_n) son sucesiones no necesariamente convergentes en A

Demostración. ver Equivalent forms of uniform continuity for a real function □

Probemos que x^2 no es uniformemente continua usando la caracterización por sucesiones.

PDQ: Demostrar que $f(x) = x^2$ no es continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. En efecto, sea $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$ luego

$$0 \leq |x_n - y_n| = |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| = |\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}|$$

y concluyendo por teorema del sándwich se tiene que

$$|x_n - y_n| \to 0 \tag{4}$$

Por otro lado

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2| = |n+1-n| = |1| = 1 \tag{5}$$

De esta forma $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$ ya que $|f(x_n) - f(y_n)| \to 1$

Por lo que probamos la existencia de dos sucesiones $(x_n), (y_n)$ en $\mathbb{R}$ tales que $|x_n - y_n| \to 0$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$. Es decir

$$\exists (x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}, |x_n - y_n| \to 0 \land |f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$$

que es justamente la negación de ser uniforme continuo. Por lo tanto $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua. □

Mensaje final, ánimo con esto, es denso y difícil, pero ustedes pueden! ante cualquier cosa no duden en preguntar pyanez@dim.uchile.cl

Atte P.Y Catarsis y Marcelo Navarro de otro espacio temporal