MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Teorema del valor inter-miedo

29 de Agosto de 2021

Recuerdo:

- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces
$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$
- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente
- **Función continua en un punto**
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si
$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$
- **Caracterización** $\varepsilon - \delta$
Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$
$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$
- **Álgebra de funciones continuas**
Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.
- [**TVI o Bolzano**] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
- [**TVI-Generalizado**] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$
- [**Teorema de Weierstras**]
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.
- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.
- [**Continuidad Uniforme**]
Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\overline{x}$ que puedo estudiar.
- Toda función uniformemente continua es continua.
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\overline{x} \in A$

P1. [CONTROL]

Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, con un mínimo global único en el punto $\overline{x}$ y que satisface $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que tiene la propiedad
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(\overline{x}) + \frac{1}{n}$$

a) Pruebe que si la subsucesión $(x_{\varphi(n)})$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ entonces $\ell = \overline{x}$

b) Pruebe que (x_n) tiene alguna subsucesión que converge a $\overline{x}$

Figura 1: UNA DE LAS MEJORES PELICULAS DE DISNEY

P2. Definimos la función en $\mathbb{R}$.

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Pruebe que si $n \to \infty$, entonces $tanh(n) \to 1$ y que $tanh(-n) \to -1$.

c) Usando el T.V.I. demuestre que $\forall y \in (-1, 1), \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Ind: analice $y > 0, y = 0, y < 0$

d) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$

P3. [**Continuidad Uniforme**]

a) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}$ una función. Demuestre que los siguientes puntos son equivalentes

1) f es uniformemente continua en A
2) $\forall (x_n), (y_n) \subseteq A, |x_n - y_n| \to 0 \implies |f(x_n) - f(y_n)| \to 0$
Note que (x_n) o (y_n) no necesariamente convergen.

b) Use el resultado de la parte anterior para demostrar que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

c) Estudie la continuidad uniforme en $(0, 1)$ de las siguientes funciones:

1) $xsin(1/x)$

2) $f(x) = e^x cos(\frac{1}{x})$

Propuestos

P4. Demuestre que al calentar un aro siempre existen dos puntos diametralmente opuestos a la misma temperatura. ***Ind:*** *Sea $T(\alpha)$ la temperatura en función del ángulo en radianes. Considere la función auxiliar $f(\alpha) = T(\alpha) - T(\alpha + \pi)$.*

P5. ($\star$) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica, de periodo $p > 0$. Pruebe que f es uniformemente continua.

a) Considere $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que f es continua. Demuestre que f tiene un punto fijo, es decir

$$\exists \overline{x} \in [0, 1],\ f(\overline{x}) = \overline{x}$$

b) Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

P6. **[CONTROL]**
Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$.

a) Probar que $\forall n \geq 1,\ g_n(x)$ tiene una raíz r_n positiva

b) Demuestre que la sucesión de raíces $(r_n)_{n\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente.

P7. **[P2 *a*) Control 1, Año 2016]**
Sean f, g, h las funciones definidas por:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor, \quad g(x) = \sin(\pi f(x)), \quad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

a) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0, 1)$.

c) **[Propuesto]** Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Muestre que $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$

P8. Pruebe que dadas dos funciones continuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tales que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) < g(x_0)$, entonces,$\exists \delta > 0$, tal que $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) < g(x)$.

Hint: Demuestrelo primero para $f \equiv 0$ y luego defina una función apropiada para concluir.

"Nunca es demasiado tarde para nada."
El Coronel no tiene quien le escriba-Gabriel García Márquez