

IN790-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería

Profesor: Denis Sauré

Auxiliares: Benjamín Barrientos F.

Matías Romero Y.



Auxiliar 6

10 de Noviembre de 2021

P1. [Ejercicio 7.18 Resnick] Considere una secuencia de variables aleatorias $(X_n)_n$ i.i.d. tal que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ y $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Muestre que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{c.s.} 0$$

P2. [Ejercicio 7.10 Resnick]

a) Suponga que $(X_n)_n$ es una secuencia que cumple

- **media cero:** $\mathbb{E}(X_n) = 0$ para todo n .
- **uniformemente acotada:** existe $M > 0$ tal que $|X_n| < M$ para todo n .
- **m -dependiente:** la familia de σ -álgebras $\{\sigma(X_{j_i}, \dots, X_{k_i})\}_{i=1}^l$ es independiente si $k_{i-1} + m < j_i$ para todo $i = 2, \dots, l$.

Muestre que $S_n/n \rightarrow 0$ c.s.

Hint: Considere las subsecuencias $X_i, X_{i+m+1}, X_{i+2(m+1)}, \dots$ para $i = 1, \dots, m+1$.

b) Suponga que $(\xi_n)_n$ son i.i.d. de rango finito, sin pérdida de generalidad $\{1, \dots, l\}$ (e.g. dado con l caras), con

$$p(u) = \mathbb{P}(\xi_1 = u), \quad u = 1, \dots, l.$$

Para una m -tupla $(u_1, \dots, u_m) \in \{1, \dots, l\}^m$, se define $N_n(u_1, \dots, u_m)$ como la frecuencia del tupla en los primeros $n + m - 1$ lanzamientos, esto es, el número de veces $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\xi_k = u_1, \dots, \xi_{k+m-1} = u_m.$$

Muestre que con probabilidad 1, todas las frecuencias relativas asintóticas son lo que deberían ser, es decir,

$$\frac{N_n(u_1, \dots, u_m)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \prod_{i=1}^m p(u_i),$$

para cada m y m -tupla u_1, \dots, u_m .

P3. [Ejercicio 7.12 Resnick] Suponga que una secuencia $(X_n)_{n \geq 0}$ se define iterativamente de la siguiente manera: X_0 distribuye uniforme en $[0, 1]$ y para $n \geq 1$, X_{n+1} distribuye uniforme en $[0, X_n]$. Muestre que

$$\frac{1}{n} \log X_n \text{ converge c.s.}$$

y encuentre el límite casi seguro.