Auxiliar 6

Ch. 5: Integración y Esperanza

- Aproximación de Medibles:
  a. Indicatrices
  b. Simples (Linealidad)
  c. Medibles Positivas (TCM)
  d. Medibles (f_+ - f_-)
- Esperanza (Definición y propiedades)
- Resultados límites (TCM, Fatou, TCD)
- Teorema de Transformación
- Medibilidad en Espacios Producto
- Teorema de Fubini

Escalamiento

$(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{B}_2)$ espacios medibles

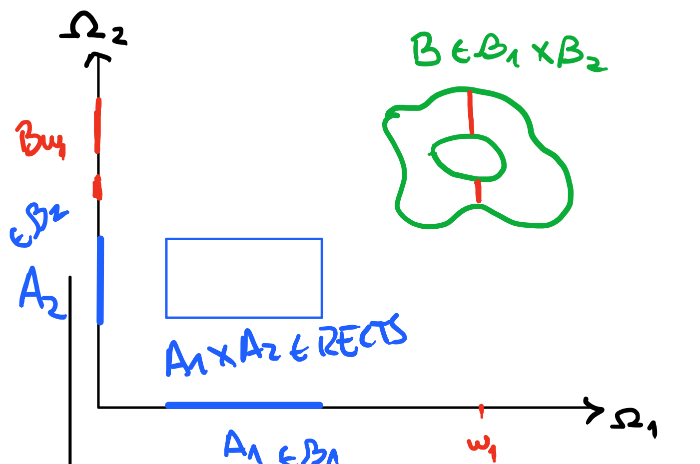
$\Omega_1 \times \Omega_2$

¿Qué estructura (sigma-álgebra, medida de prob.) tenemos en el producto?

$RECTS = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{B}_i\}$

semi-álgebra

$$\boxed{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \sigma(RECTS)}$$



•) Para $B \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, $\omega_1 \in \Omega_1$

$B_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in B\} \in \mathcal{B}_2$ (Fibras)

•) $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$- medible

$\Rightarrow$ $X_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}_2$- medible

$\omega_2 \mapsto X(\omega_1, \omega_2)$

•) $\mathbb{P}_i$ medida de prob. en $(\Omega_i, \mathcal{B}_i)$, $i=1,2$

Basta definir $\mathbb{P}$ en RECTS y extender

1. $\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2)$ Medida producto (indep)

2. $\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} K(\omega_1, A_2)\, d\mathbb{P}_1(\omega_1)$, donde

(i) $\forall\, \omega_1$, $K(\omega_1, \cdot)$ es medida de prob. en $\mathcal{B}_2$

(ii) $\forall\, A_2$, $K(\cdot, A_2)$ es $\mathcal{B}_1$-medible

Kernel (núcleo) de transición

Si $K(\omega_1, A_2) = \mathbb{P}_2(A_2)$, $\forall\, \omega_1$ (no depende de ω_1)
recuperamos 1.

Teorema de Fubini

En $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2, \mathbb{P})$ con $\mathbb{P}$ medida producto

Si X es $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$-medible y $\begin{cases} X \geq 0, \text{ o} \\ X \in L^1 \ (E(|X|) < \infty) \end{cases}$

$$E(X) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X\, d\mathbb{P} = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2)\, d\mathbb{P}_2(\omega_2) \right) d\mathbb{P}_1(\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2)\, d\mathbb{P}_1(\omega_1) \right) d\mathbb{P}_2(\omega_2)$$

...

* Vale incluso con medidas σ-finitas, esto es

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad \text{t.q.} \quad \lambda(A_n) < \infty, \ \forall n$$

ejm: λ Lebesgue en $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n, n+1)$

* Verificar hipótesis!

ejm: $\Omega_i = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_i = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $i = 1,2$

$\lambda(A) = |A|$ para $A \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$$f(n,m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ -1, & n = m-1 \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} n & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & & \ddots & & \end{array}$$

$$\int_{\mathbb{N}^2} f \, d\lambda = \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} f(n,m)$$

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} f(n,m) = 0$ (cada fila suma 0)

2. $\sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n,m) = 1$ (columna 1 suma 1 y las demás 0)

Fubini no aplica porque f no es ≥ 0 ni integrable

$$\int_{\mathbb{N}^2} |f| \, d\lambda = \sum_{\mathbb{N}^2} 2 = \infty$$