

IN790-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería**Profesor:** Denis Sauré**Auxiliares:** Benjamín Barrientos F.

Matías Romero Y.

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 6

13 de Octubre de 2021

P1. [Proposición 5.5.2 Resnick] Sea $g : (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ una función medible positiva. Suponga que $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio con distribución F . Si F es AC con densidad f , tenemos como esperanza de $g(\mathbf{X})$

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Pauta Pregunta 1: Para probar el resultado para toda g medible positiva, argumentamos por *escalamiento*:

a) Si $g = \mathbf{1}_A$, con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x})\mathbf{1}_A(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \end{aligned}$$

y como f es densidad de $\mathbf{X} \sim F$

$$\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = F(A) := \mathbb{P}(\mathbf{X} \in A), \quad (\text{notación Resnick p.137-139}).$$

Para llegar a $\mathbb{E}(g(\mathbf{X}))$, recordamos que como consecuencia del teorema de transformación podemos expresar el valor esperado como integral abstracta o numérica (Corolario 5.5.1 Resnick):

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{\Omega} g(\mathbf{X}(\omega))d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}).$$

Esto nos permite proceder de dos maneras

- Con integración abstracta

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = \mathbb{P}(\mathbf{X}^{-1}(A)) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{1}_{\mathbf{X}^{-1}(A)}(\omega)d\mathbb{P}(\omega)}_{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\mathbf{X}^{-1}(A)})} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\mathbf{X}(\omega))d\mathbb{P}(\omega)}_{\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \circ \mathbf{X})} = \mathbb{E}(g(\mathbf{X})),$$

donde reescribimos la indicatriz aprovechando que $\omega \in \mathbf{X}^{-1}(A) \Leftrightarrow \mathbf{X}(\omega) \in A$.

- Con integración numérica

$$F(A) = \int_A dF(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_A(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(g(\mathbf{X})),$$

b) Si $g = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i}$ simple positiva, basta aprovechar la linealidad de la integral (y esperanza) para reducirnos al caso anterior

$$\int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N a_i \int_{\mathbb{R}^k} f(\mathbf{x})\mathbf{1}_{A_i}d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N a_i \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_i}(\mathbf{X})) = \mathbb{E}(g(\mathbf{X})).$$

- c) Finalmente, para g medible positiva, podemos aproximar con una sucesión $(g_n)_n$ de funciones simples positivas de manera que $g_n \nearrow g$. Por lo probado en el caso anterior, tenemos que para cada n

$$\int_{\mathbb{R}^k} g_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}(g_n(\mathbf{X})),$$

y verificamos que al tomar límite $n \rightarrow \infty$ resulta en el resultado que queremos:

- Para el lado derecho, tenemos variables aleatorias positivas $Y_n := g_n(\mathbf{X}) \nearrow g(\mathbf{X}) =: Y$, por lo que el TCM nos asegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g_n(\mathbf{X})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(\mathbf{X}))$$

- Para el lado izquierdo podemos usar el TCM en el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), F)$, donde tenemos funciones medibles positivas $g_n \nearrow g$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} g_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} g_n(\mathbf{x}) dF(\mathbf{x}) \stackrel{(\text{TCM})}{=} \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x}) dF(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Nota: En la auxiliar dije que como f es densidad, entonces es positiva, por lo que $g_n \cdot f \nearrow g \cdot f$ y ocupé el TCM directamente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} g_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

pero esta aplicación del TCM es en el espacio $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ con la medida de Lebesgue $d\mathbf{x}$ que, aunque efectivamente es válida, no aplica el resultado específico de este curso al no ser un espacio de probabilidad (la medida del espacio completo es infinita).

P2. [Ejercicio 5.9 Resnick] Use el teo. de Fubini para mostrar que para cualquier distribución F ,

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x)) dx = a,$$

donde dx se entiende como la medida de Lebesgue.

Pauta Pregunta 2: Para ocupar Fubini reescribimos la integral en un espacio producto. Notemos que, como F define una medida de probabilidad en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, el integrando $F(x+a) - F(x)$ corresponde a la medida del intervalo $(x, x+a]$, es decir $F((x, x+a])$.¹ Con esto, podemos expresar

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(x, x+a]}(u) dF(u) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x, u) dF(u) dx,$$

donde $A = \{(x, u) \subseteq \mathbb{R}^2 : x < u \leq x+a\}$. Cabe destacar que este conjunto A no es un rectángulo, pero sí es borel-medible pues

$$A = \underbrace{\{(x, u) \subseteq \mathbb{R}^2 : x < u < x+a\}}_{\text{abierto } \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \cup \underbrace{\{(x, u) \subseteq \mathbb{R}^2 : u = x+a\}}_{\text{cerrado } \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Considerando la medida producto $(F \times \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue, ocupamos Fubini², con la función indicatriz (positiva y integrable)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A(x, u) d(F \times \lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x, u) dx dF(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[u-a, u)}(x) dx dF(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} u - (u-a) dF(u) \\ &= a \int_{\mathbb{R}} dF(u) = a. \end{aligned}$$

¹Si una v.a. X tiene distribución F , esto es equivalente a $\mathbb{P}(X \in (x, x+a])$.

²Similar a lo comentado en la pregunta anterior, aunque $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ no es un espacio de probabilidad ($\lambda(\mathbb{R}) = \infty$), el teorema de Fubini sigue valiendo

P3. [Ejercicio 5.22 Resnick] Sea X una v.a. positiva.

- a) Utilice el teo. de Fubini aplicado a medidas σ -finitas para probar que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{[0, \infty)} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

- b) Pruebe que para cualquier $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \alpha \int_{[0, \infty)} x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

- c) Demuestre que si existen $C, \delta > 0$, $0 < \beta < 1$ tal que

$$\mathbb{P}(X > n\delta) \leq C\beta^n,$$

entonces $\mathbb{E}(X^\alpha) < \infty$ para cualquier $\alpha > 0$

- d) Pruebe que si existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(X^\delta) < \infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta \mathbb{P}(X > x) = 0.$$

- e) Suponga que X tiene una distribución de cola pesada dada por

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{C}{x \log x}, \quad x \geq 17.$$

Muestre que $\mathbb{E}(X) = \infty$, pero $x\mathbb{P}(X > x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$.

- f) Suponga ahora que X no es necesariamente positiva, pero $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Muestre que para cualquier $\eta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x\mathbb{P}(|X| > \eta\sqrt{x}) = 0.$$

Pauta Pregunta 3:

- a) Como comentamos anteriormente, el teorema de Fubini aplica a más que solo espacios de probabilidad. Por ejemplo, la medida de Lebesgue λ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es σ -finita, es decir, el espacio completo tiene medida infinita, pero se puede escribir como unión de conjuntos de medida finita: $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1]$, con $\lambda((n, n+1]) = 1$.

Demostramos lo pedido con integración abstracta

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx &= \int_0^\infty \int_\Omega \mathbf{1}_{\{X > x\}}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) dx \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty \mathbf{1}_{(-\infty, X(\omega)]}(x) dx d\mathbb{P}(\omega) \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(X), \end{aligned}$$

notando que en $(*)$ ocupamos que $X \geq 0$.

- b) Con integración numérica, denotando F la distribución de X (con soporte $[0, \infty)$ al ser $X \geq 0$)

$$\begin{aligned}
 \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x) dx &= \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1} \int_0^\infty \mathbf{1}_{[x, \infty)}(u) dF(u) dx \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1} \mathbf{1}_{(-\infty, u]}(x) dx dF(u) \\
 &= \int_0^\infty \int_0^u \alpha x^{\alpha-1} dx dF(u) \\
 &= \int_0^\infty u^\alpha dF(u) = \mathbb{E}(X^\alpha).
 \end{aligned}$$

- c) Ocupamos la parte anterior, y separamos la integral notando que si $x \in (n\delta, (n+1)\delta)$, $\mathbb{P}(X > x) \leq \mathbb{P}(X > n\delta) \leq C\beta^n$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^\alpha) &= \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x) dx \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \alpha x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x) dx \\
 &\leq \sum_{n=0}^\infty C\beta^n \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \alpha x^{\alpha-1} dx \\
 &\leq \sum_{n=0}^\infty C\beta^n (n+1)^\alpha \delta^\alpha = C\delta^\alpha \sum_{n=0}^\infty \beta^n (n+1)^\alpha < \infty.
 \end{aligned}$$

- d) En efecto,

$$\begin{aligned}
 x^\delta \mathbb{P}(X > x) &= x^\delta \int_x^\infty dF(u) \\
 &\leq \int_x^\infty u^\delta dF(u) \\
 &= \mathbb{E}(X^\delta) - \int_0^x u^\delta dF(u) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

- e) Ocupamos a) y acotamos

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx \geq C \int_{17}^\infty \frac{1}{x \log x} dx = C \log(\log(x))|_{17}^\infty = \infty,$$

pero

$$x \mathbb{P}(X > x) \geq \frac{C}{\log x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

- f) Ocupamos d) para la v.a. $Y = |X| \geq 0$, $\delta = 2$, con $y = \eta\sqrt{x} \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \infty$

$$x \mathbb{P}(|X| > \eta\sqrt{x}) = \frac{1}{\eta^2} y^2 \mathbb{P}(Y > y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$$