IN79O-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Denis Sauré
Auxiliares: Benjamín Barrientos F.
Matías Romero Y.

Auxiliar 6

13 de Octubre de 2021

P1. [**Proposición 5.5.2 Resnick**] Sea $g : (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ una función medible positiva. Suponga que $\mathbf{X}$ es un vector aleatorio con distribución F. Si F es AC con densidad f, tenemos como esperanza de $g(\mathbf{X})$

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^k} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

P2. [**Ejercicio 5.9 Resnick**] Use el teo. de Fubini para mostrar que para cualquier distribución F,

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x)) dx = a,$$

donde dx se entiende como la medida de Lebesgue.

P3. [**Ejercicio 5.22 Resnick**] Sea X una v.a. positiva.

a) Utilice el teo. de Fubini aplicado a medidas σ-finitas para probar que

$$\mathbb{E}(X) = \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

b) Pruebe que para cualquier $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \alpha \int_{[0,\infty)} x^{\alpha-1} \mathbb{P}(X > x) dx.$$

c) Demuestre que si existen $C, \delta > 0$, $0 < \beta < 1$ tal que

$$\mathbb{P}(X > n\delta) \leq C\beta^n,$$

entonces $\mathbb{E}(X^\alpha) < \infty$ para cualquier $\alpha > 0$

d) Pruebe que si existe $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(X^\delta) < \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} x^\delta \mathbb{P}(X > x) = 0.$$

e) Suponga que X tiene una distribución de cola pesada dada por

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{C}{x \log x}, \quad x \geq 17.$$

Muestre que $\mathbb{E}(X) = \infty$, pero $x\mathbb{P}(X > x) \to 0$ si $x \to \infty$.

f) Suponga ahora que X no es necesariamente positiva, pero $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Muestre que para cualquier $\eta > 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}(|X| > \eta\sqrt{x}) = 0.$$