Consultas Tarea 1

Ejercicio 3 (Resnick 3.13).

Muestre que si X es una variable aleatoria, entonces $\sigma(X)$ es un σ-algebra generado por una clase contable, y vice-versa, si $\mathcal{B}$ es un σ-algebra generado por una clase contable, entonces, $\mathcal{B} = \sigma(X)$ para alguna variable aleatoria X.

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ contable/numerable

Si $|\mathcal{C}| \leq \mathbb{N}$ o $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots\} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$

1. Sea X v.a. pdq: $\exists\, \mathcal{C}$ contable t.q. $\sigma(X) = \sigma(\mathcal{C})$

2. Sea $\mathcal{C}$ contable. pdq: $\exists\, X$ v.a. t.q. $\sigma(X) = \sigma(\mathcal{C})$

$\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots\}$

Ejercicio 4 (Resnick 3.16).

Suponga que $\mathcal{B}$ es un σ-algebra de conjuntos de $\mathbb{R}$. Muestre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}$ si y solo si cada función continua en $\mathbb{R}$ es medible respecto a $\mathcal{B}$ y por lo tanto $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es el σ-algebra más pequeño con respecto al cual las funciones continuas son medibles.

1. pdq: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B} \iff \forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, f es $\mathcal{B}$-medible

2. Concluir: Si $\mathcal{B}$ σ-álg t.q. toda f continua es $\mathcal{B}$-medible $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}$.

Ejercicio 8 (Variación de Resnick 4.14).

Suponga que una moneda que cae cara con probabilidad p es lanzada al aire repetidamente. Sea A_k el evento que k o más monedas caen cara de forma consecutiva en algun momento entre los lanzamientos 2^k al $2^{k+1} - 1$. Muestre que

$$\mathbb{P}(A_k, \, i.o.) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq 1/2 \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

$\limsup A_k$

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$$

$$\boxed{B_i = \{\omega : \omega_i = 1\}}$$

$$A_k = \{\omega : \_\_\_\_ \}$$

$$= \bigcup_{i \geq k} \hat{A}_i$$

$$\tilde{A}_k = \{\text{exact. } k\}$$

Ejercicio 5 (Resnick 3.19).

Considere $T : (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{B}_2)$, y suponga que $X \in \mathcal{B}_1/\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Muestre que $X \in \sigma(T)$ si y solo si existe una variable aleatoria $Y \in \mathcal{B}_2/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que

$\Leftrightarrow$

$$X(\omega_1) = Y(T(\omega_1)), \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1.$$

$$\begin{tikzcd} (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "X"'] & (\Omega_2, \mathcal{B}_2) \arrow[dl, "Y"] \\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) & \end{tikzcd}$$

ω

$\sigma(Y) \subseteq \mathcal{B}_2$

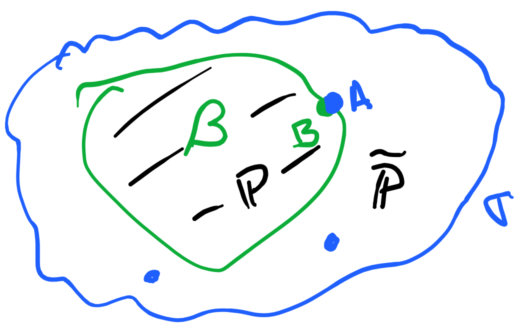
$$\sigma(\{T^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_2\}) = \sigma(T) \subseteq \mathcal{B}_1$$

Ejercicio 1 (Resnick 1.34 + 2.4).

Suponga que $\mathcal{B}$ es un σ-algebra de subconjuntos de Ω y suponga que $A \notin \mathcal{B}$. Muestre que $\sigma(\mathcal{B} \cup \{A\})$ consiste en los conjuntos de la forma

$$\star \quad \boxed{A \cap B \cup A^c \cap B',} \quad B, B' \in \mathcal{B}.$$

Adicionalmente muestre que una medida $\mathbb{P}$ definida sobre $\mathcal{B}$ admite una extension sobre $\sigma(\mathcal{B} \cup \{A\})$ (no utilize el teorema 2.4.3).



(1) $\sigma(\mathcal{B} \cup \{A\}) = \{\star\}$

(2) Tenemos $\mathbb{P} : \mathcal{B} \to [0,1]$

Definir $\widetilde{\mathbb{P}} : \underbrace{\sigma(\mathcal{B} \cup \{A\})}_{B \in \widetilde{\mathcal{B}}} \longrightarrow [0,1]$ medida de prob.

- extensión $\quad \widetilde{\mathbb{P}}(B) = \mathbb{P}(B)$

$B \in \mathcal{B}$