IN79O-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Denis Sauré
Auxiliares: Benjamín Barrientos F.
Matías Romero Y.

Auxiliar 3

8 de Septiembre de 2021

P1. [**Ejercicio 3.1 Resnick**] Sea $(\Omega, \mathcal{B})$ un espacio medible. Pruebe que $A \in \mathcal{B}$ si y solo si $\mathbf{1}_A \in \mathcal{B}$.

Pauta Pregunta 1:

$\Rightarrow$: Si $\mathbf{1}_A \in \mathcal{B}$ ($\mathbf{1}_A$ es $\mathcal{B}$-medible), entonces $A = \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{B}$.

$\Leftarrow$: Sabemos que $\sigma(\mathbf{1}_A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\} = \sigma(A)$, y si $A \in \mathcal{B}$, entonces $\sigma(A) \subseteq \mathcal{B}$. Luego, $\sigma(\mathbf{1}_A) \subseteq \mathcal{B}$, o equivalentemente $\mathbf{1}_A \in \mathcal{B}$.

P2. **[Ejercicio 3.12 Resnick]** Muestre que una función real monótona es (Borel) medible.

Pauta Pregunta 2: Basta considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **creciente**, pues si fuera decreciente tenemos que $-f$ es medible y la medibilidad se mantiene bajo ponderaciones.

Gracias al test de medibilidad para v.a. (Corolario 3.2.1 del Resnick), basta probar que las preimágenes $[f \leq \lambda] := f^{-1}((-\infty, \lambda]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda < f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $[f \leq \lambda] = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, mientras que si $\lambda \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $[f \leq \lambda] = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

En cualquier otro caso, podemos definir $x(\lambda) := \sup\{x : f(x) \leq \lambda\} \in \mathbb{R}$, y tenemos dos casos dependiendo del valor de f en $x(\lambda)$. Si $f(x(\lambda)) \leq \lambda$, entonces $[f \leq \lambda] = (-\infty, x(\lambda)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, mientras que si $f(x(\lambda)) > \lambda$, entonces $[f \leq \lambda] = (-\infty, x(\lambda)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Luego, f monótona es medible.

P3. **[Ejercicio 3.22 Resnick]** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico a tiempo discreto en $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, es decir, toda X_n es variable aleatoria. Definimos el **paseo aleatorio** inducido por este proceso como

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ n \geq 1.$$

Sea $\tau = \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : S_n > 0\}$ el **primer tiempo de balance positivo**. Pruebe que τ es una variable aleatoria. Asumiendo que $\tau(\omega) < \infty$ para todo $\omega \in \Omega$, pruebe que S_τ es una variable aleatoria.

Pauta Pregunta 3: Para probar que τ es v.a., procedemos igual que en la pregunta anterior. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario, queremos probar que $[\tau \leq \lambda] \in \mathcal{B}$. De hecho, como τ toma solo valores en $\mathbb{N}$, $[\tau \leq \lambda] = [\tau \leq \lfloor \lambda \rfloor]$, así que basta considerar $\lambda = N \in \mathbb{N}$.

Notemos que $\tau > N$ si solo si $S_n \leq 0$, para todo $n \leq N$ (hasta n no se ha alcanzado el balance positivo). Con esto podemos escribir

$$[\tau > N] = \bigcap_{n=1}^{N} [S_n \leq 0] \in \mathcal{B},$$

pues como S_n es v.a. (suma de v.a.), cada conjunto de la intersección es un evento (está en $\mathcal{B}$) y la σ-álgebra es cerrada para intersecciones. Además, como es cerrada para complemento, $[\tau \leq N] \in \mathcal{B}$ y concluimos que τ es v.a.

Ahora, si asumimos que τ es finito, podemos escribir

$$S_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \mathbf{1}_{[\tau=n]}.$$

Como τ es v.a., $[\tau = n] \in \mathcal{B}$, por lo que la **P1** asegura que $\mathbf{1}_{[\tau=n]}$ es v.a. y al multiplicar por otra v.a. S_n también resulta en una v.a. Luego, S_τ es una serie (límite) de v.a., concluyendo así que ella misma es v.a.

P4. **[Ejercicio 3.11 Resnick]** Considere el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue. Sea $(X_t)_{t\in[0,1]}$ el proceso definido por

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = \omega \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Muestre que cada X_t es una variable aleatoria y demuestre que

$$\sigma(X_t : t \in [0,1]) = \{A \subseteq [0,1] : A \text{ es numerable o } A^c \text{ es numerable}\}.$$

Pauta Pregunta 2: Identificamos $X_t = \mathbf{1}_{\{t\}}$, que es v.a. pues $\{t\} \in \mathcal{B}([0,1])$, para todo $t \in [0,1]$.

Recordamos que la definición de $\sigma(X_t : t \in [0,1])$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todas las generadas por los X_t, es decir

$$\sigma(X_t : t \in [0,1]) = \sigma\left(\bigcup_{t\in[0,1]} \sigma(X_t)\right),$$

donde $\sigma(X_t) = \sigma(\mathbf{1}_{\{t\}}) = \{\emptyset, [0,1], \{t\}, \{t\}^c\}$. Demostramos la igualdad de σ-álgebras por doble inclusión. Denotemos $\mathcal{C}$ a la σ-álgebra de la derecha.

$\supseteq$: Sea $A \in \mathcal{C}$. Consideremos A numerable (el otro caso es igual). Entonces podemos enumerar $A = \{t_1, t_2, \ldots\} = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y escribir

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t_n\}.$$

y como para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\{t_n\} \in \sigma(X_{t_n}) \subseteq \bigcup_{t\in[0,1]} \sigma(X_t) \subseteq \sigma(X_t : t \in [0,1]),$$

concluimos que $A \in \sigma(X_t : t \in [0,1])$.

$\subseteq$: Basta probar que $\bigcup_{t\in[0,1]} \sigma(X_t) \subseteq \mathcal{C}$, pues como $\mathcal{C}$ es σ-álgebra, tendríamos que $\sigma\left(\bigcup_{t\in[0,1]} \sigma(X_t)\right) \subseteq \mathcal{C}$ al ser la de la izquierda la σ-álgebra más pequeña por definición.
En efecto, si $A \in \bigcup_{t\in[0,1]} \sigma(X_t)$, como $\sigma(X_t) = \{\emptyset, [0,1], \{t\}, \{t\}^c\}$, tenemos pocas opciones para A.

- Si $A =$, o $A = [0,1]$, entonces claramente $A \in \mathcal{C}$ al ser $\mathcal{C}$ σ-álgebra.
- Si $A = \{t\}$ para algún $t \in [0,1]$, entonces A es numerable (más aún finito), así que $A \in \mathcal{C}$.
- Si $A = \{t\}^c$ par algún $t \in [0,1]$, entonces A^c es numerable y $A \in \mathcal{C}$.

Es decir, en cualquier caso $A \in \mathcal{C}$, concluyendo la inclusión.