IN79O-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Denis Sauré
Auxiliares: Benjamín Barrientos F.
Matías Romero Y.

Auxiliar 3

8 de Septiembre de 2021

P1. [**Ejercicio 3.1 Resnick**] Sea $(\Omega, \mathcal{B})$ un espacio medible. Pruebe que $A \in \mathcal{B}$ si y solo si $\mathbf{1}_A \in \mathcal{B}$.

P2. [**Ejercicio 3.12 Resnick**] Muestre que una función real monótona es (Borel) medible.

P3. [**Ejercicio 3.22 Resnick**] Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico a tiempo discreto en $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, es decir, toda X_n es variable aleatoria. Definimos el **paseo aleatorio** inducido por este proceso por

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1.$$

Sea $\tau = \text{ínf}\{n \geq 1 : S_n > 0\}$ el **primer tiempo de balance positivo**. Pruebe que τ es una variable aleatoria. Asumiendo que $\tau(\omega) < \infty$ para todo $\omega \in \Omega$, pruebe que S_τ es una variable aleatoria.

P4. [**Ejercicio 3.11 Resnick**] Considere el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue. Sea $(X_t)_{t\in[0,1]}$ el proceso estocástico definido por

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = \omega \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Muestre que cada X_t es una variable aleatoria y demuestre que

$$\sigma(X_t : t \in [0,1]) = \{A \subseteq [0,1] : A \text{ es numerable o } A^c \text{ es numerable}\}.$$