IN79O-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Denis Sauré
Auxiliares: Benjamín Barrientos F.
Matías Romero Y.

Auxiliar 2

1 de Septiembre de 2021

P1. [**Ejercicio 1.41 Resnick**] Una clase $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ no vacía se dice **clase monótona** si es cerrada bajo límites monótonos, esto es, si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que todo $A_n \in \mathcal{M}$ y es creciente (resp. decreciente), es decir, $A_n \subseteq A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subseteq A_n$), entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n (\text{resp. } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{M}.$$

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ álgebra. Muestre que $\mathcal{C}$ es σ-álgebra si y solo si $\mathcal{C}$ es clase monótona.

Pauta Pregunta 1: Demostramos la equivalencia por doble implicancia.

$\underline{\Rightarrow}$: Asumimos que $\mathcal{C}$ es σ-álgebra y probamos que es clase monótona por definición. Sea $(A_n)_n \subseteq \mathcal{C}$ una secuencia monótona (creciente o decreciente). Sabemos que el límite es la unión (si la secuencia es creciente) o la intersección (si es decreciente) de todos, pero en cualquier caso siempre tenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C},$$

pues $\mathcal{C}$ es σ-álgebra.

$\underline{\Leftarrow}$: Asumimos que, además de ser álgebra, $\mathcal{C}$ es clase monótona, y probamos lo que falta para ser σ-álgebra:

$$(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{C} \implies \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}. \quad \textit{(también serviría la intersección)}$$

En efecto, sea $(A_n)_n \subseteq \mathcal{C}$ y denotemos $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Como $\mathcal{C}$ es álgebra, todo $B_n \in \mathcal{C}$. Además la secuencia es creciente pues $B_n \subseteq B_n \cup A_{n+1} = B_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Luego, como $\mathcal{C}$ es clase monótona, concluimos que $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$.

P2. [Ejercicio 2.11 Resnick] Sean $(B_n)_{n\geq 1}$ eventos con $\mathbb{P}(B_n) = 1$ para todo n. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1.$$

Pauta Pregunta 2: Llamemos $A = \bigcap_{n\geq 1} B_n$, como $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$, basta ver que $\mathbb{P}(A^c) = 0$. En efecto, por leyes de De Morgan $A^c = \bigcup_{n\geq 1} B_n^c$, y podemos usar la σ-subaditividad para acotar la probabilidad de la unión por la suma:

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} B_n^c) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(B_n^c) = 0,$$

pues $\mathbb{P}(B_n^c) = 1 - \mathbb{P}(B_n) = 0$.

P3. **[Ejercicio 2.10 Resnick]** Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Decimos que $A, B \in \mathcal{B}$ son **$\mathbb{P}$-equivalentes** si $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$ y llamamos *clase de equivalencia* de un conjunto $A \in \mathcal{B}$ a la clase

$$A^{\#} = \{B \in \mathcal{B} : \mathbb{P}(A\Delta B) = 0\}. \quad \textit{(en general se omite el \#)}$$

Pruebe que si $A, B \in \mathcal{B}$ cumplen $\mathbb{P}(A \cap B) = \text{máx}\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$, entonces son $\mathbb{P}$-equivalentes.

Pauta Pregunta 3: Recordamos que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y usamos la primera igualdad junto con las siguientes propiedades de la medida de probabilidad:

- Si $C \subseteq D$, entonces $\mathbb{P}(D \setminus C) = \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C)$.
- $\mathbb{P}(C \cup D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cap D)$.

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\Delta B) &= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \\
&\leq 2\,\text{máx}\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} - 2\mathbb{P}(A \cap B) = 0,
\end{aligned}$$

donde ocupamos la hipótesis que $\mathbb{P}(A \cap B) = \text{máx}\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$ en el último paso. Como $\mathbb{P}(\cdot) \geq 0$, concluimos que $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$, es decir, A, B son $\mathbb{P}$-equivalentes.

P4. **[Ejercicio 2.9 Resnick]** Un **átomo** en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ es un evento $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ y para todo $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $\mathbb{P}(B) = 0$, o bien $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$.

a) Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathbb{P}$ determinada por una función de distribución F. Muestre que los átomos son $\{\{x\} : F(x) - F(x^-) > 0\}$.

b) Muestre que el espacio de probabilidad $((0,1], \mathcal{B}((0,1]), \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue, es **no-atómico**, es decir, no tiene átomos.

c) Demuestre que dos átomos que no son $\mathbb{P}$-equivalentes tienen intersección $\mathbb{P}$-equivalente a $\varnothing$.

d) Pruebe que un espacio de probabilidad tiene a lo más numerables átomos.

e) **[Difícil]** Demuestre que si el espacio de probabilidad no tiene átomos, entonces para todo $a \in (0,1]$ existe al menos un conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mathbb{P}(A) = a$.

f) **[Propuesto]** Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$, existe una *partición finita* de Ω por conjuntos en $\mathcal{B}$ que tienen probabilidad $\leq \varepsilon$ o bien son átomos con probabilidad $> \varepsilon$.

g) **[Propuesto]** En el espacio de clases de equivalencia defina

$$d(A^{\#}, B^{\#}) = \mathbb{P}(A, B),$$

donde $A \in A^{\#}$ y $B \in B^{\#}$. Pruebe que d es una *métrica* en este espacio. Verifique que

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \Delta B),$$

para concluir que $\mathbb{P}$ es *uniformemente continua* en el espacio de clases de equivalencia.

Pauta Pregunta 3:

a) Vemos primero que esos eventos son átomos. En efecto, siempre se tiene que $\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - F(x^-)$, con lo cual $\mathbb{P}(\{x\}) > 0$, y si $B \subseteq \{x\}$, entonces solo hay dos opciones: $B = \varnothing$, en cuyo caso $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$, o bien $B = \{x\}$ y $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{x\})$.

Para ver que todos los átomos son de esta forma, consideremos un átomo A arbitrario y dos valores:

$$\alpha = \sup\{x : \mathbb{P}((-\infty, x) \cap A) = 0\}$$
$$\beta = \inf\{x : \mathbb{P}((x, \infty) \cap A) = 0\}$$

Intuitivamente, imaginemos A dibujado en la recta real, como $\mathbb{P}(A) > 0$, α representa el punto donde A "empieza" (al menos donde empieza a tener masa de probabilidad), y β donde "termina" (de acumular probabilidad).

Con esta idea, notemos que **no** puede pasar que $\alpha < \beta$, pues en tal caso podemos *dividir* A en partes[1] donde al menos una tiene probabilidad en $(0, \mathbb{P}(A))$, contradiciendo que sea átomo. Luego, como $\alpha = \beta$, la masa de probabilidad de A *se acumula prácticamente* en ese único punto $\{\alpha\}$, concluyendo que $F(\alpha) - F(\alpha^-) = \mathbb{P}(\alpha) = \mathbb{P}(A) > 0$. Para formalizar lo anterior notemos que por definición de α(y β) para todo $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}((-\infty, \alpha - 1/n) \cap A) = \mathbb{P}((\alpha + 1/n, \infty) \cap A) = 0,$$

por lo que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}([\alpha - 1/n, \alpha + 1/n] \cap A) \searrow \mathbb{P}(\{\alpha\} \cap A)$ (límite decreciente). Finalmente, como $\{\alpha\} \cap A \neq \varnothing$, entonces $\alpha \in A$ y $\mathbb{P}(\{\alpha\} \Delta A) = 0$, siendo $\mathbb{P}$-equivalentes.

[1] Por ejemplo $A_1 = A \cap [\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{3})$, $A_2 = A \cap (\beta - \frac{\beta - \alpha}{3}, \beta]$, y $A_3 = A \setminus (A_1 \cup A_2)$.

b) Sin pérdida de generalidad, la parte anterior vale para $\Omega = (0,1]$, y la medida de Lebesgue está determinada por $F(x) = x$ que es continua, con lo cual $\{\{x\} : F(x) - F(x^-) > 0\} = \varnothing$.

c) Sean A, B átomos. Queremos ver que $\mathbb{P}((A \cap B)\Delta\varnothing) = 0$. Primero, notemos que $\mathbb{P}((A \cap B)\Delta\varnothing) = \mathbb{P}(A \cap B) - \cancelto{0}{\mathbb{P}(\varnothing)}$. Supongamos por contradicción que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. Como A, B son átomos y $A \cap B$ es subconjunto de ambos con probabilidad positiva, entonces

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \text{máx}\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\},$$

y como vimos en **P3**, esto implica que A, B son $\mathbb{P}$ equivalentes, llegando a una contradicción.

d) Definamos $\mathcal{A}_n := \{A \text{ átomo} : \mathbb{P}(A) \geq 1/n\}$. Basta ver que estas colecciones son numerables, pues $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{A}_n$ es justo la colección de todos los átomos (todos tienen probabilidad > 0) y unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Más aún, veamos que $|\mathcal{A}_n| \leq n$. Sean $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}_n$ distintos (en el sentido de clases de equivalencias, o bien **no** $\mathbb{P}$-equivalentes), entonces por la parte c), $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$ si $i \neq j$, es decir, son *casi disjuntos*[2]. Luego,

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{\geq 1/n} \geq \frac{m}{n},$$

concluyendo que $m \leq n$ y $\mathcal{A}_n$ tiene a lo más n átomos distintos.

[2] Ver Auxiliar 1