IN790-1 Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Denis Sauré
Auxiliares: Benjamín Barrientos F.
Matías Romero Y.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 2

1 de Septiembre de 2021

P1. [**Ejercicio 1.41 Resnick**] Una clase $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ no vacía se dice **clase monótona** si es cerrada bajo límites monótonos, esto es, si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión tal que todo $A_n \in \mathcal{M}$ y es creciente (resp. decreciente), es decir, $A_n \subseteq A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subseteq A_n$), entonces

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n (\text{resp. } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{M}.$$

Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ álgebra. Muestre que $\mathcal{C}$ es σ-álgebra si y solo si $\mathcal{C}$ es clase monótona.

P2. [**Ejercicio 2.11 Resnick**] Sean $(B_n)_{n\geq 1}$ eventos con $\mathbb{P}(B_n) = 1$ para todo n. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 1.$$

P3. [**Ejercicio 2.10 Resnick**] Sea $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Decimos que $A, B \in \mathcal{B}$ son **$\mathbb{P}$-equivalentes** si $\mathbb{P}(A\Delta B) = 0$ y llamamos *clase de equivalencia* de un conjunto $A \in \mathcal{B}$ a la clase

$$A^{\#} = \{B \in \mathcal{B} : \mathbb{P}(A\Delta B) = 0\}. \quad \textit{(en general se omite el \#)}$$

Pruebe que si $A, B \in \mathcal{B}$ cumplen $\mathbb{P}(A \cap B) = \max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$, entonces son $\mathbb{P}$-equivalentes.

P4. [**Ejercicio 2.9 Resnick**] Un **átomo** en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ es un evento $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mathbb{P}(A) > 0$ y para todo $B \subseteq A$ con $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $\mathbb{P}(B) = 0$, o bien $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$.

a) Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y $\mathbb{P}$ determinada por una función de distribución F. Muestre que los átomos son $\{\{x\} : F(x) - F(x^-) > 0\}$.

b) Muestre que el espacio de probabilidad $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]), \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue, es **no-atómico**, es decir, no tiene átomos.

c) Demuestre que dos átomos que no son $\mathbb{P}$-equivalentes tienen intersección $\mathbb{P}$-equivalente a $\varnothing$.

d) Pruebe que un espacio de probabilidad tiene a lo más numerables átomos.

e) [**Difícil**] Demuestre que si el espacio de probabilidad no tiene átomos, entonces para todo $a \in (0, 1]$ existe al menos un conjunto $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mathbb{P}(A) = a$.

f) [**Propuesto**] Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$, existe una *partición finita* de Ω por conjuntos en $\mathcal{B}$ que tienen probabilidad $\leq \varepsilon$ o bien son átomos con probabilidad $> \varepsilon$.

g) [**Propuesto**] En el espacio de clases de equivalencia defina

$$d(A^{\#}, B^{\#}) = \mathbb{P}(A, B),$$

donde $A \in A^{\#}$ y $B \in B^{\#}$. Pruebe que d es una *métrica* en este espacio. Verifique que

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A\Delta B),$$

para concluir que $\mathbb{P}$ es *uniformemente continua* en el espacio de clases de equivalencia.