Cápsula CMTC

En una oficina se utilizan M computadores iguales. Cada uno presenta fallas luego de un tiempo aleatorio exponencial de media $1/\lambda$. La política de reparación consiste en esperar hasta que fallen todos los computadores para llamar al servicio técnico y repararlos simultáneamente. Esta reparación simultánea toma un tiempo exponencial de tasa μ.

a) Modele la situación anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuéntrelas.

Estados: computadores funcionando $\{0, \ldots, M\}$

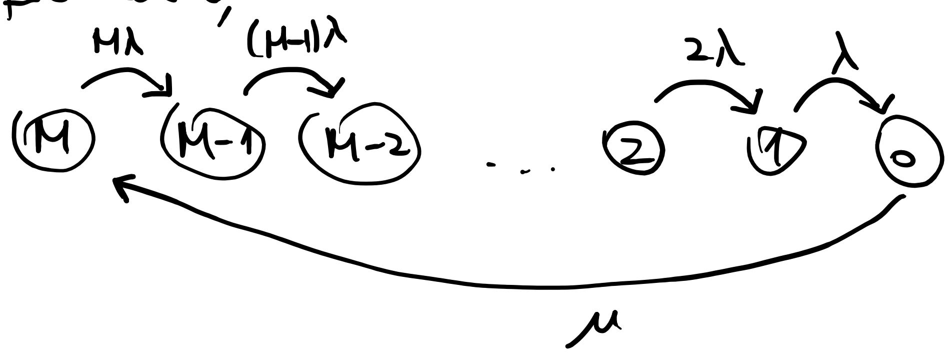
Transiciones (Q: tasas): •) Si tengo $n \in \{1, \ldots, M\}$ computadores funcionando

$q_{n,n-1} = n\lambda$, porque es la tasa del tiempo en que alguno falla

$$\text{alguno} = \min_{i=1,\ldots,n} T_i, \text{ con } T_i \sim \exp(\lambda) \sim \exp(n\lambda)$$

•) $q_{0,M} = \mu$

Gráficamente,



única clase recurrente y finita

$\therefore$ existe prob. estacionaria $(\pi Q = 0)$

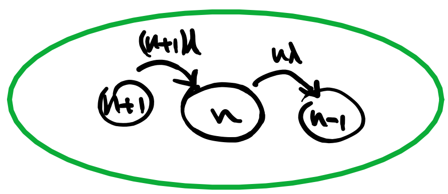
$$\underline{(\pi_M, -, \pi_0)} \begin{array}{c|cccccc} & M & M-1 & M-2 & \cdots & 1 & 0 \\ \hline M & -M\lambda & M\lambda & 0 & \cdots & & \\ M-1 & 0 & -(M-1)\lambda & (M-1)\lambda & 0 & \cdots & \\ M-2 & \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 2 & 0 & & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & \mu & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\mu \end{array} = (0, -, 0)$$

$$-\pi_M M\lambda + \pi_0 \mu$$

salida = entrada

$$\underline{\pi_M M\lambda = \pi_0 \mu} \qquad (M)$$

Nodo genérico



$\vdots$

En general $\quad \pi_n \cdot n\lambda = \pi_{n+1}(n+1)\lambda \qquad (n) \qquad 1 \leq n \leq M-1$

$\vdots$

$$\pi_0 \mu = \pi_1 \lambda \qquad (0)$$

Casos bordes (0) y (M) se ven aparte del caso general

Tenemos $M+1$ ecuaciones y $M+1$ incógnitas

Ojo: Siempre hay 1 redundante*

* Ecuación que se puede deducir de las demás y, por tanto, no aporta al sistema de ecuaciones.

Resolvemos

(0) $\boxed{\pi_1 = \frac{\mu}{1\cdot\lambda}\pi_0}$

(1) $\pi_1 \cancel{\lambda} = \pi_2 \cdot 2\cancel{\lambda} \Rightarrow \pi_2 = \frac{\pi_1}{2} = \frac{\mu}{2\lambda}\pi_0$

(2) $\pi_2 2\cancel{\lambda} = \pi_3 3\cancel{\lambda} \Rightarrow \pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 = \frac{\pi_1}{3} = \frac{\mu}{3\lambda}\pi_0$

(n) $\pi_{n+1}(n+1)\cancel{\lambda} = \pi_n \cdot n\cancel{\lambda}$

$$\Rightarrow \pi_{n+1} = \frac{n}{n+1}\pi_n \quad , \quad \forall \; \underline{1 \leq n \leq M-1} \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$= \frac{\cancel{n}}{n+1}\left(\frac{n-1}{\cancel{n}}\pi_{n-1}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{1}{n+1}\pi_1 = \boxed{\frac{\mu}{(n+1)\lambda}\pi_0} \quad ★$$

En particular $\pi_M = \frac{\mu}{M\lambda}\pi_0$ que es (M) +

Necesitamos imponer $\sum_{n=0}^{M}\pi_n = 1$

$$1 = \pi_0 + \sum_{n=1}^{M}\frac{\mu}{n\lambda}\pi_0$$

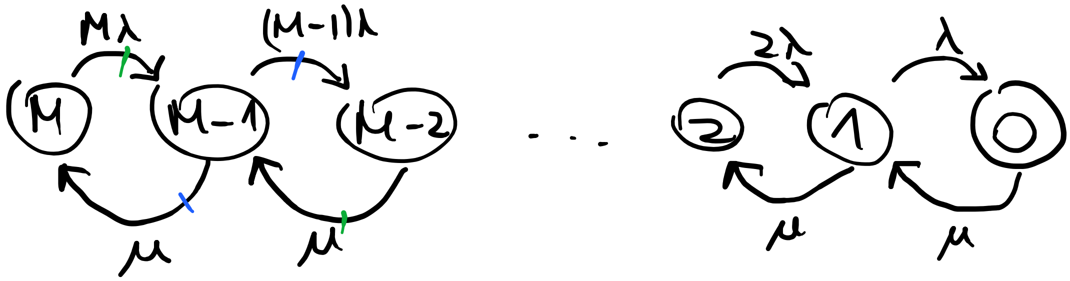
$$= \pi_0\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}\right)$$

Recordar: Para resolver el sistema siempre se ocupa que la suma de las probabilidades es 1.

$$\Rightarrow \pi_0 = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}\right)^{-1} \quad ✓$$

b) Suponga que la oficina quiere cambiar a una nueva política de reparación, en la cual se llama a un técnico de confianza apenas un computador falle. El técnico repara un computador en tiempo exponencial de tasa μ, y si al terminar hay más computadores con fallas se dispone a arreglarlos inmediatamente.

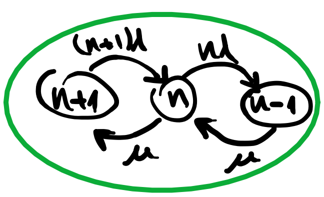
Modele la nueva política como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee las ecuaciones necesarias para calcularlas. Exprese la ganancia neta de cada política si la oficina genera ingresos de R_n con n computadores funcionando, el servicio técnico cobra C por unidad de tiempo, mientras que el técnico de confianza cobra c.



única clase recurrente y finita $\Rightarrow \exists \tilde{\pi}$

salida = entrada

Nodo genérico



$$\tilde{\pi}_M \cdot M\lambda = \tilde{\pi}_{M-1}\mu \qquad (M)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\pi}_n(n\lambda+\mu) = \tilde{\pi}_{n+1}(n+1)\lambda + \tilde{\pi}_{n-1}\cdot\mu, \quad 1 \leq n \leq M-1$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\pi}_0\cdot\mu = \tilde{\pi}_1\cdot\lambda \qquad (0)$$

$$\sum_{n=0}^{M} \tilde{\pi}_n = 1$$

* caso de nacimiento y muerte

En a) la ganancia es

$$\sum_{n=1}^{M} R_n \pi_n - C \pi_0$$

El servicio técnico solo trabaja cuando hay 0 computadores funcionando.

Recordar: π_n se interpreta como la fracción de tiempo que la cadena está en el estado n.

En b) $$\sum_{n=1}^{M} R_n \tilde{\pi}_n - c(1-\tilde{\pi}_M)$$

El técnico de confianza trabaja siempre que haya un computador malo.

c) Considere ahora que la oficina tiene computadores distintos. El computador n-ésimo falla luego de un tiempo exponencial de media $1/\lambda_n$, y el técnico lo repara en un tiempo exponencial de tasa μ_n. En este caso el técnico decide que siempre se dispondrá a reparar el computador que haya fallado último. Esto significa que si alguno falla mientras está reparando otro, entonces se cambia a arreglar el más reciente.

Modele este problema como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee las ecuaciones necesarias para calcularlas.

Estados: Orden y cuáles $\rightarrow (i_1, \ldots, i_k) + \phi$

los computadores a reparar en orden de más reciente a menos.

ejm: Todos buenos $\rightarrow \phi$

Falla 2 $\rightarrow (2)$

Falla 3 $\rightarrow (3,2)$

Falla 1 $\rightarrow (1,3,2)$

Repara 1 $\rightarrow (3,2)$

Falla 4 $\rightarrow (4,3,2)$

¿ Cuántos estados hay en total?

Si hay K malos : $\binom{M}{K} K! = \frac{M!}{(M-K)!}$

Maneras de elegir k de M cuando el orden importa.

$$\Rightarrow |E| = \sum_{k=0}^{M} \frac{M!}{(M-k)!} = M! \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!} < \infty$$

Transiciones :

1. Fallas: $(i_1, \_, i_k) \xrightarrow{\lambda_i} (i, i_1, \_, i_k), \; i \notin \{i_1, -, i_k\}$

$$q_{(i_1,-,i_k),(i,i_1,-,i_k)} = \lambda_i ,$$

2. Reparaciones: $(i_1, -, i_k) \xrightarrow{\mu_{i_1}} (i_2, \_, i_k)$

$$q_{(i_1,\_,i_k)(i_2,\_,i_k)} = \mu_{i_1} \quad \checkmark$$

Única clase recurrente: de cualquier lista/estado $(i_1,\dots,i_k)$ puedo pasar a $\emptyset$ y además desde $\emptyset$ puedo pasar a cualquier estado $(i_1',\dots,i_k')$

Ecuaciones $\pi Q = 0$:

salida = entrada

De un estado $(i_1,\dots,i_k)$

$$\pi_{(i_1,\dots,i_k)}\Big(\mu_{i_1}+\sum_{i\notin\{i_1,\dots,i_k\}}\lambda_i\Big) = \pi_{(i_2,\dots,i_k)}\lambda_{i_1}+\sum_{i\notin\{i_1,\dots,i_k\}}\pi_{(i,i_1,\dots,i_k)}\,\mu_i$$

Se repara el más reciente (i_1) o falla alguno nuevo (fuera de la lista de malos).

Falla i_1 teniendo $(i_2,\dots,i_k)$ o se repara alguno fuera de la lista que era más reciente.

Caso borde (estado vacío)

$$\pi_\emptyset \cdot \sum_{i=1}^{M}\lambda_i = \sum_{i=1}^{M}\pi_{(i)}\cdot\mu_i$$