INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3272 - Decisiones Bajo Incertidumbre
Profesor: D. Sauré
Auxiliares: Nicolás Acevedo, Benjamín Barrientos,
Pablo Paredes, Matías Romero, Ignacia Segura, Pablo Ubilla.

Trabajo Dirigido Control 2

P1. Poisson - Máquina de Helados

Una máquina de helados recibe una mantención según un proceso de Poisson con tasa μ. Si la máquina no recibe mantenimiento por un intervalo de tiempo h, se rompe. Al romperse esta debe ser reparada, lo que ocurre según un tiempo distribuido exponencial con tasa λ, tras lo que vuelve a ponerse en funcionamiento.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina se rompa por primera vez justo antes del k-ésimo mantenimiento (entre el $(k-1)$-ésimo y k-ésimo mantenimiento)?

Sabemos que los tiempos entre llegadas X_i son variables aleatorias iid, donde distribuyen $X_1 \sim exp(\mu)$. Vemos que la máquina se romperá para la primera llegada i donde $X_i \geq h$. De esta forma, si estamos viendo la probabilidad de que la máquina se rompa antes del k-ésimo mantenimento estamos viendo (y usando que las v.a aleatorias son iid):

$$P(X_1 \leq h, X_2 \leq h..., X_{k-1} \leq h, X_k \geq h) = P(X_1 \leq h)^{k-1} P(X_1 \geq h) = (1-e^{-\mu h})^{k-1} e^{-\mu h}$$

b) Encuentre el número esperado de mantenimientos antes de la primera vez que se rompe la máquina.

De la parte anterior vemos que la cantidad de mantenimientos tiene una distribución geométrica de parámetro $e^{-\mu h}$. Sea entonces Y: número de mantenimiento antes de que se rompa la máquina, $Y \sim geom(e^{-\mu h})$. Luego $E(Y) = \frac{1-e^{-\mu h}}{e^{-\mu h}}$

c) Encuentre el tiempo esperado hasta la primera vez que se rompe la máquina.

FORMA 1:

Sea W el tiempo de los mantenimientos que sí se realizan. Podemos ver que para cada mantenimiento menor a h sumamos tanto el tiempo que demoró en llegar ese mantenimiento como W nuevamente (pues el proceso se reinicia y se vuelve a considerar el mismo tiempo).

$$E(W) = \int_0^h (t + E(W))\mu e^{-\mu t} dt = \int_0^h t\mu e^{-\mu t} dt + E(W) \int_0^h \mu e^{-\mu t} dt$$

$$E(W) = \frac{1 - e^{-\mu h}(\mu h + 1)}{\mu} + E(W)(1 - e^{-\mu h})$$

$$E(W) = \frac{1 - e^{-\mu h}(\mu h + 1)}{\mu e^{-\mu h}}$$

Luego el tiempo pedido es $E(W) + h$.

FORMA 2:

Buscamos el tiempo esperado entre mantenimientos X_1, condicional a que $X_1 < h$. Usando ley de esperanza total:

$$E(X_1) = E(X_1|X_1 < h)P(X_1 < h) + E(X_1|X_1 \geq h)P(X_1 \geq h)$$

$$\frac{1}{\mu} = E(X_1|X_1 < h)(1 - e^{-\mu h}) + (\frac{1}{\mu} + h)(e^{-\mu h})$$

$$E(X_1|X_1 < h) = \frac{1 - e^{-\mu h}(\mu h + 1)}{\mu(1 - e^{-\mu h})}$$

Luego el tiempo total esperado que tomarán los mantenimientos que sí se realizan será: $E(Y)E(X_1|X_1 < h) = \frac{1-e^{-\mu h}(\mu h+1)}{\mu(1-e^{-\mu h})} \frac{1-e^{-\mu h}}{e^{-\mu h}} = \frac{1-e^{-\mu h}(\mu h+1)}{\mu e^{-\mu h}}$.

Finalmente agregamos el tiempo h que se tiene en el intervalo que se rompe la máquina, llegando a: $\frac{1-e^{-\mu h}(\mu h+1)}{\mu e^{-\mu h}} + h$

d) Encuentre la proporción del tiempo que la máquina estará funcionando.

Basta con notar que al tiempo esperado anterior debemos agregarle el tiempo esperado que demora en repararse: $\frac{1}{\lambda}$, con lo que obtenemos el total que demora el proceso hasta reiniciarse. De esta forma la proporción será:

$$\frac{E(W) + h}{E(W) + h + \frac{1}{\lambda}}$$

P2. Renovación - Costos de espera

Considere pasajeros que van llegando al paradero de la micro de acuerdo a un proceso de renovación con tasa μ (es decir, los tiempos entre llegada tienen esperanza $1/\mu$). Cuando llegan N pasajeros, la micro parte y llega otra instantáneamente, lista para volverse a llenar. Esto se repite infinitamente. La compañía de buses incurre un costo de $\$n \cdot c$ por unidad de tiempo si hay exactamente $n < N$ pasajeros esperando que parta la micro, y un costo fijo de $\$K$ que se le cobra a la compañía por cada viaje.

a) Para N fijo y a largo plazo, encuentre la tasa de costos.

Sabemos que los tiempos entre llegada T_i son tales que $\mathbb{E}(T_i) = 1/\mu$. Debemos describir cuanto demora un ciclo. Así, sea

$$X = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

el tiempo total de un ciclo. Por linealidad de la esperanza, $\mathbb{E}(X) = N/\mu$. Podemos modelar los costos como una recompensa después de un ciclo, y así ocupar los teoremas de renovación con recompensa. Por otro lado, el costo de un ciclo está dada por

$$C = 0 \cdot T_1 + c \cdot T_2 + 2c \cdot T_3 + \cdots + (N-1)c \cdot T_N + K.$$

Por lo tanto, el costo esperado de un ciclo está dado por

$$\mathbb{E}(C) = K + c \cdot \frac{N(N-1)}{2\mu}.$$

Finalmente, a largo plazo tenemos que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(C)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{K \cdot \mu}{N} + c \cdot \frac{(N-1)}{2}.$$

b) Ahora suponga que lo contratan de la empresa anterior. Elija el mejor N que le sirve a la compañía para minimizar su tasa de costos a largo plazo.

Procedemos a minimizar la expresión anterior en N. Para esto, derivamos e igualamos a cero y también verificamos que es un mínimo. Sea $f(N)$ la tasa de costos a largo plazo, de esta forma;

$$f'(N) = \frac{c}{2} - \frac{K \cdot \mu}{N^2} \Rightarrow N^* = \sqrt{\frac{2K\mu}{c}}$$
$$f''(N^*) = \frac{2K\mu}{N^3} > 0.$$

Así, el óptimo es N^*. Si no es natural, entonces probamos con los extremos (parte entera hacia arriba/abajo) y elegimos la que entregue mejor resultado.

P3. Poisson modificado

Un proceso de conteo en un espacio muestral Ω es tal que $N(\emptyset) = 0$, y $N(A) \leq N(B)$ cuando $A \subseteq B$, donde $A, B \in \Omega$. Decimos que el proceso de conteo $N(\cdot)$ es un proceso modificado de Poisson de tasa $\lambda > 0$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ si

- $N(\emptyset) = 0$,
- Para dos conjuntos disjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ se tiene que $N(A)$ y $N(B)$ son variables aleatorias independientes,
- $N(A)$ se distribuye $Poisson(\lambda\, P(A))$ para $A \in \mathcal{F}$

Consteste

a) Muestre que condicional en que solo ocurre un evento (del proceso modificado) en todo el espacio muestral, dicho evento occure en el conjunto A con probabilidad $P(A)$.

$$\begin{aligned}
P(N(A) = 1|N(\Omega) = 1) &= \frac{P(N(\Omega) = 1|N(A) = 1)P(N(A) = 1)}{P(N(\Omega) = 1)} \\
&= \frac{P(N(\Omega \setminus A) = 0|N(A) = 1) \cdot e^{-\lambda P(A)}\lambda P(A)}{e^{-\lambda P(\Omega)}\lambda P(\Omega)} \\
&= \frac{P(N(\Omega \setminus A) = 0) \cdot e^{-\lambda P(A)}\lambda P(A)}{e^{-\lambda P(\Omega)}\lambda P(\Omega)} \quad A, \Omega \setminus A \text{ disjuntos} \\
&= \frac{e^{-\lambda P(\Omega \setminus A)}(\lambda P(\Omega \setminus A))^0 e^{-\lambda P(A)}\lambda P(A)}{e^{-\lambda}\lambda} \\
&= \frac{e^{-\lambda(1-P(A))}\lambda e^{-\lambda P(A)}\lambda P(A)}{e^{-\lambda}\lambda} \\
&= P(A)
\end{aligned}$$

b) Suponga que usted observa que el número de eventos que ocurren sobre un conjunto $A \in \mathcal{F}$ es k. Sea $C \in \mathcal{F}$ otro conjunto. Calcule el número esperado de eventos que caen sobre el conjunto C.

Separaremos C en dos conjuntos $C_1 = C \setminus A$ y $C_2 = C \cap A$, vemos entonces que al tener estos conjuntos disjuntos podemos escribir la esperanza como: $E(N(C)) = E(N(C_1)) + E(N(C_2))$. Calcularemos ambos términos por separado.

El primer caso es sencillo, tenemos que $C1$ y A conjuntos disjuntos, por lo que $N(C_1)$ y $N(A)$ son variables aleatorias independientes (Poisson modificado). Luego $E(N(C_1)) = \lambda P(C_1)$, pues $N(C_1) \sim Poisson(\lambda P(C_1))$

Luego en el segundo caso tenemos conjuntos que no son disjuntos, por lo que tenemos que estudiar los distintos casos. Queremos la distribución condicional, por lo que debemos encontrar $P(N(C) = i|N(A) = k)$. Por bayes (y usando que A y $A \setminus C_2$ son disjuntos):

$$
\begin{aligned}
P(N(C_2)=i|N(A)=k) &= \frac{P(N(A)=k|N(C_2)=i)P(N(C_2)=i)}{P(N(A)=k} \\
&= \frac{P(N(A\setminus C_2)=k-i)P(N(C_2)=i)}{P(N(A)=k)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(P(A)-P(C_2))}(\lambda(P(A)-P(C_2)))^{k-i}}{(k-i)!}\cdot\frac{e^{-\lambda P(C_2}(\lambda P(C_2))^{i}}{i!} \\
&\cdot\frac{k!}{e^{-\lambda P(A)}(\lambda P(A))^{k}} \\
&= \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\left(\frac{P(C_2)}{P(A)}\right)^{i}\left(\frac{P(A)-P(C_2))}{P(A)}\right)^{k-i}
\end{aligned}
$$

De esta forma vemos que $N(C_2)|N(A)=k \sim bin(k,\frac{P(C_2)}{P(A)})$, por lo tanto $E(N(C_2)) = k\frac{P(C_2)}{P(A)}$.
A través del desarrollo podemos concluir que:

$$
E[N(C)\mid N(A)=k] = \lambda P\left(A^{c}\cap C\right)+k\left(\frac{P(A\cap C)}{P(A)}\right)
$$

P4. Renovación - Compra de autos

Matías compra un auto nuevo cada vez que el anterior se le rompe, o el anterior alcanza una duración de 6 años. Suponga que los tiempos de vida sucesivos de los autos son i.i.d. distribuidos con una uniforme $[0, 10]$ años. Un auto nuevo cuesta \$20 000. Además, Matías incurre en un costo aleatorio cada vez que un auto se le rompe, distribuído como una exponencial de media \$4 000. Si el auto no se le rompe, además Matías puede venderlo y recibir un valor monetario aleatorio, distribuido uniforme en el intervalo $[\$1\,000, \$3\,000]$.

a) ¿Cuál es el costo promedio en el largo plazo de la estrategia que sigue Matías?
Calculamos el tiempo promedio de un ciclo. Sea T el tiempo que espera Matías en renovar su auto. Tenemos que calcular la esperanza de T.

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^6 \frac{t}{10} dt + 6 \cdot \mathbb{P}(T > 6) = \frac{36}{20} + 6 \cdot 0{,}4 = 4{,}2 \text{ años.}$$

Ahora, cuanto cuesta un ciclo. Con probabilidad 0,6 el auto se rompe y tengo que pagar en promedio 4 000, y con 0,4 no se rompe y puedo venderlo.

$$\mathbb{E}(C) = 20\,000 + 0{,}6 \cdot 4\,000 - 0{,}4 \cdot 2\,000 = 21\,600.$$

De esta manera en el largo plazo, tenemos que la estrategia tiene un costo promedio de

$$\frac{21\,600}{4,2} = 5\,143\,[\$/\text{año}].$$

b) ¿Cuánto es el tiempo de vida residual que duran los autos en promedio a largo plazo?
Indicación. Modele lo anterior como renovación con recompensa, y calcule la recompensa del primer ciclo dado X_1.

Condicional en que sabemos X_1, podemos calcular la recompensa del primer periodo

$$R_1 = \int_0^{X_1} A(s)ds = \int_0^{X_1} (X_1 - s)ds = \frac{X_1^2}{2}.$$

Sucesivamente, $R_n = X_n^2/2$. Luego la vida residual al largo plazo, en virtud de los teoremas límites, puede ser expresada como (anotando $A(t)$ la vida residual a tiempo t):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t A(s)ds}{t} = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2\mathbb{E}(X)}.$$

Con esto, la expresión buscada es $\frac{\mathbb{E}(T^2)}{2\mathbb{E}(T)}$. Para calcular $\mathbb{E}(T^2)$, usamos la misma técnica de antes.

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_0^6 \frac{t^2}{10} dt + 36 \cdot \mathbb{P}(T > 6) = 21{,}6 \text{ años.}$$