INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3272 - Decisiones Bajo Incertidumbre
Profesor: D. Sauré
Auxiliares: Nicolás Acevedo, Benjamín Barrientos,
Pablo Paredes, Matías Romero, Ignacia Segura, Pablo Ubilla.

Pauta Trabajo Dirigido Control 3

Pregunta 1.(25 %) Considere un hospital en que hay cuatro camas, las que pueden estar libres u ocupadas. Pacientes llegan al hospital de acuerdo a un processo de Poisson con una tasa $\alpha > 0$ [pacientes/hr.]. Al llegar al hospital, los pacientes esperan en la sala de espera hasta ser asignados a una cama libre. Una vez en una cama, esta queda ocupada y el paciente demora en recuperarse un tiempo aleatorio distribuido exponencial con tasa $\beta > 0$ tal que $4\beta > \alpha$. Al cabo de este tiempo, el paciente abandona el hospital y su cama queda libre.

1. (2 punto) Modele este proceso con un proceso de nacimiento y muerte. Dibuje la cadena de Markov en tiempo continuo correspondiente.

   Solución. Esta cadena corresponde a una $M/M/4$. El estado es el número de pacientes en el hospital. El proceso queda definido por

$$\lambda_i = \alpha \quad i \geq 0, \qquad \mu_i = \begin{cases} i \cdot \beta & i = 1, 2, 3, 4 \\ 4 \cdot \beta & \sim \end{cases}.$$

2. (1 punto) Establezca formulas para calcular las probabilidades estacionarias.

   Solución. Definimos $\rho := \alpha/\beta$. Por ser un proceso de nacimiento y muerte, sabemos que las probabilidades estacionarias estan dadas por

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{C}{i!}\rho^i & i = 1, 2, 3 \\ \frac{C}{244^{i-4}}\rho^i & i > 3, \end{cases}$$

   donde C es tal que $\sum_i \pi_i = 1$, lo que solo se puede conseguir si $\rho < 4$.

3. (2 punto) En el largo plazo, calcule la esperanza del tiempo que un paciente espera para ser asignada a una cama y la esperanza del número de pacientes que estan esperando una cama. Puede asumir los valores de la parte 2. como conocidos.

   Solución. La esperanza de N, el número de pacientes esperando una cama esta dado por

$$E[N] = \sum_{i=5}^{\infty}(i - 4)\pi_i.$$

   Usando little, T el tiempo esperado el cola esta dada por

$$E[T] = E[N]/\alpha.$$

4. (1 punto) Asuma ahora que en un tiempo aleatorio $T \sim \exp(\delta)$ se vacuna (instantaneamente) a toda la población, tras lo cual ningún paciente más llega al hospital (pero los pacientes enfermos que esperan siguen siendo enfermos). Cambie su cadena de Markov para incorporar esto.

   Solución. El estado es un par (i, j) donde i representa el numero de pacientes, y $j = 1$ si ya se vacuno a la población, $j = 0$ si no. La cadena queda definida por la matriz Q

$$q_{(i,j),(i',j')} = \begin{cases} \alpha & i' = i+1,\ j = j' = 0 \\ i\,\beta & 0 < i < 4,\ i' = i-1 \\ 4\,\beta & i \geq 4,\ i' = i-1 \\ \delta & i = i',\ j = 0,\ j' = 1 \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

Pregunta 2. (25 %) Considere un vuelo que parte desde el aeropuerto de Santiago. Los pasajeros llegan al check-in de acuerdo a un proceso de Poisson de $\gamma > 0$. La aerolinea dispone de dos counters para hacer el check-in, pero los pasajeros forman una única fila para acceder a los counters. Una vez en el counter, el tiempo que demora un pasajero en hacer el check-in es aleatorio, distribuido exponential con una tasa de $\delta > 0$.

Después del check-in, con probabilidad $p > 0$ un pasajero se dirige al control de seguridad VIP. Aquellos pasajeros que no son VIP se dirigen al control de seguridad general. Una vez en un control de seguridad, los pasajeros esperan en una única cola para pasar por uno de los múltiples scanners de seguridad disponibles. Cada scanner toma un tiempo aleatorio distribuido exponencial de tasa $\lambda > 0$ en escanear a un pasajero. Considere que el control de seguridad general tiene dos scanners y el control de seguridad VIP tiene tres. Después de pasar los scanners, los pasajeros se dirigen a las salidas de sus vuelos.

1. (2 puntos) Modele el check-in y los controles de seguridad con una red de colas. Para cada cola, defina el tipo de la cola y las condiciones de estado estacionario.

   Solución. El sistema 1 es la cola para el check-in, que corresponde a una M|M|2, con tasa de atencion δ. El sistema 2 es el control de seguridad VIP, que corresponde a una M|M|2, con tasa de atencion λ. El sistema 3 es el control de seguridad general, que corresponde a a una M|M|3 con tasa de atención λ. Las tasas externas de llegadas son $\lambda_1 = \gamma$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La matriz de ruteo es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Con esto, las tasas efectivas de llegadas son $\bar{\lambda}_1 = \gamma$, $\bar{\lambda}_2 = \gamma\,p$ y $\bar{\lambda}_3 = \gamma\,(1-p)$. Las condiciones de estado estacionario son $\bar{\lambda}_1 < 2\delta$, $\bar{\lambda}_2 < 2\lambda$ y $\bar{\lambda}_3 < 3\lambda$.

2. (2 puntos) Calcule el número promedio de pasajeros en el sistema (check-in + controles de seguridad) en el largo plazo. Puede usar como conocidos los tiempos de estadia promedio en el largo plazo $E_i(\lambda, \mu)$ para la cola $M|M|i$, $i > 0$, donde λ y μ denotan las tasas de llegada y atención a la cola.

   Solución. La esperanza del tiempo promedio de estadia T esta dada por

   $$E[T] = E_2(\gamma, \delta) + p \cdot E_2(p\gamma, \lambda) + (1-p) \cdot E_3((1-p)\gamma, \lambda).$$

   Utilizando Little, el número promedio de pasajeros en el sistema en el lago plazo, L esta dado por

   $$L = E[T] \cdot \gamma.$$

3. (2 puntos) Cuanto tiempo pasa en promedio, en el largo plazo, un pasajero esperando ser atentido (esto es, esperando su turno para llegar al counter/scanner).

   Solución. dado que el tiempo total de atencion promedio es $1/\delta + 1/\lambda$, el tiempo promedio de espera es $E[T] - \delta^{-1} - \lambda^{-1}$.

Pregunta 3. (50 %) Ordenes llegan a la cocina de una conocida pizzeria de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ. Una orden se asocia a una (y solo una) pizza, y especifica que ingredientes tiene que incluirse en la preparación. Cada orden es procesada por uno de infinitos cocineros, los que agregan un ingrediente a la vez; supondremos que existe un conjunto T de ingredientes, y que el tiempo que demora cada vez un cocinero en colocar el ingrediente t es aleatorio, distribuido exponencial con media $1/\mu_t$, independiente de todo lo demas. Una vez armadas, las pizzas son colocadas en el único horno de la pizzeria (de capacidad infinita), el que demora exactamente 10 minutos en cocinar cada pizza.

Suponiendo que una pizza incluye el ingrediente t con probabilidad p_t, independiente de todo lo demás, y que los ingredientes siempre son agregados en el mismo orden (del 1 al T, saltandose aquellos que no se incluyen en la orden), conteste:

1. (2 puntos) Modele el proceso de prepación de pizzas (pre-horno) como una red de colas. Indique las tasas externas de llegada, tasas efectivas de llegada (calculelas!), las condiciones de estado estacionario, y el tipo de cola de cada subsistema.
   (Hint: considere cada ingrediente como una cola.)

   Solución. Modelamos cada ingrediente como una cola. La cola t tiene tasa externa de llegada $\lambda_t = \lambda \cdot \prod_{i=1}^{t-1}(1-p_i)p_t$, tasa de atención μ_t, e infinitos servidores. La matriz de ruteo esta dada por

   $$P_{i,j} = \begin{cases} \prod_{k=i+1}^{j-1}(1-p_k)p_j & i < j \\ 0 & \sim \end{cases}$$

   Con algo de algebra, o intuición, se puede mostrar que la tasa efectiva de llegada al sistema t es $\bar{\lambda}_t = p_t \, \lambda$. No existen condiciones de estado estacionario, puesto que todas las colas son M|M|∞.

2. (1 punto) Cuanto demora en promedio una orden en ser procesada en el largo plazo? (Incluya el tiempo en el horno.)

   Solución. Dado que cada pizza pasa por la estación t con probabilidad p_t, el tiempo esperado de proceso, W, está dado por

$$W = 10 + \sum_{t=1}^{T} \frac{p_t}{\mu_t}.$$

3. (1 punto) Después de varias horas de operación usted se da cuenta que no hay ningún cocinero colocando el ingrediente más popular. Cual es la probabilidad que no haya tampoco ningún cocinero colocando el ingrediente menos popular?

   Solución. En estado estacionario, el número de pizzas en cada subsistema son variables aleatorias independientes. Definiendo el ingrediente menos popular como $\underline{t} = \arg\min\{p_k : k = 1, \ldots, T\}$, tenemos que la probabilidad pedida es simplemente $e^{-p_{\underline{t}}\,\lambda/\mu_{\underline{t}}}$.

4. (2 puntos) Suponga ahora que los cocineros llevan las pizzas a cocineros especializados en cada ingrediente. Por un lado, los cocineros son mucho más rápidos; el cocinero especializado en el ingrediente t demora un tiempo exponencial de media $1/\mu_t^e$ en colocar el ingrediente. Por otro lado, dado que existe un solo cocinero especializado, las pizzas deben esperar su turno para ser procesadas por este cocinero. Suponiendo que $\mu_t^e = \alpha\mu_t$, para que valores de $\alpha > 0$ este nuevo proceso resulta en tiempos de proceso más cortos (en promedio)?

   Solución. Ahora todas las colas se transforman en M|M|1, y las tasas de atención cambian. Utilizando el analisis de arriba, tenemos que el tiempo esperado en esta nueva situación, W', esta dado por

$$W' = 10 + \sum_{t=1}^{T} \frac{p_t}{\alpha\mu_t - p_t\,\lambda}$$

   Comparando ambos tiempos, tenemos que la nueva configuración es mejor cuando

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{p_t}{\mu_t} > \sum_{t=1}^{T} \frac{p_t}{\alpha\,\mu_t - p_t\,\lambda}.$$

   Vemos que una condición suficiente para que lo de arriba se cumpla es

$$\alpha \geq 2 > 1 + \lambda\ \max\{\frac{p_t}{\mu_t} : t = 1, \ldots, T\}.$$