



Trabajo Dirigido Control 3

Pregunta 1. (25 %) Considere un hospital en que hay cuatro camas, las que pueden estar libres u ocupadas. Pacientes llegan al hospital de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa $\alpha > 0$ [pacientes/hr.]. Al llegar al hospital, los pacientes esperan en la sala de espera hasta ser asignados a una cama libre. Una vez en una cama, esta queda ocupada y el paciente demora en recuperarse un tiempo aleatorio distribuido exponencial con tasa $\beta > 0$ tal que $4\beta > \alpha$. Al cabo de este tiempo, el paciente abandona el hospital y su cama queda libre.

1. (2 punto) Modele este proceso con un proceso de nacimiento y muerte. Dibuje la cadena de Markov en tiempo continuo correspondiente.
2. (1 punto) Establezca formulas para calcular las probabilidades estacionarias.
3. (2 punto) En el largo plazo, calcule la esperanza del tiempo que un paciente espera para ser asignada a una cama y la esperanza del número de pacientes que estan esperando una cama. Puede asumir los valores de la parte 2. como conocidos.
4. (1 punto) Asuma ahora que en un tiempo aleatorio $T \sim \exp(\delta)$ se vacuna (instantaneamente) a toda la población, tras lo cual ningún paciente más llega al hospital (pero los pacientes enfermos que esperan siguen siendo enfermos). Cambie su cadena de Markov para incorporar esto.

Pregunta 2. (25 %) Considere un vuelo que parte desde el aeropuerto de Santiago. Los pasajeros llegan al check-in de acuerdo a un proceso de Poisson de $\gamma > 0$. La aerolínea dispone de dos counters para hacer el check-in, pero los pasajeros forman una única fila para acceder a los counters. Una vez en el counter, el tiempo que demora un pasajero en hacer el check-in es aleatorio, distribuido exponencial con una tasa de $\delta > 0$.

Después del check-in, con probabilidad $p > 0$ un pasajero se dirige al control de seguridad VIP. Aquellos pasajeros que no son VIP se dirigen al control de seguridad general. Una vez en un control de seguridad, los pasajeros esperan en una única cola para pasar por uno de los múltiples scanners de seguridad disponibles. Cada scanner toma un tiempo aleatorio distribuido exponencial de tasa $\lambda > 0$ en escanear a un pasajero. Considere que el control de seguridad general tiene dos scanners y el control de seguridad VIP tiene tres. Después de pasar los scanners, los pasajeros se dirigen a las salidas de sus vuelos.

1. (2 puntos) Modele el check-in y los controles de seguridad con una red de colas. Para cada cola, defina el tipo de la cola y las condiciones de estado estacionario.

2. (2 puntos) Calcule el número promedio de pasajeros en el sistema (check-in + controles de seguridad) en el largo plazo. Puede usar como conocidos los tiempos de estadia promedio en el largo plazo $E_i(\lambda, \mu)$ para la cola $M|M|i$, $i > 0$, donde λ y μ denotan las tasas de llegada y atención a la cola.
3. (2 puntos) Cuanto tiempo pasa en promedio, en el largo plazo, un pasajero esperando ser atendido (esto es, esperando su turno para llegar al counter/scanner).

Pregunta 3. (50%) Ordenes llegan a la cocina de una conocida pizzeria de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ . Una orden se asocia a una (y solo una) pizza, y especifica que ingredientes tiene que incluirse en la preparación. Cada orden es procesada por uno de infinitos cocineros, los que agregan un ingrediente a la vez; supondremos que existe un conjunto T de ingredientes, y que el tiempo que demora cada vez un cocinero en colocar el ingrediente t es aleatorio, distribuido exponencial con media $1/\mu_t$, independiente de todo lo demás. Una vez armadas, las pizzas son colocadas en el único horno de la pizzeria (de capacidad infinita), el que demora exactamente 10 minutos en cocinar cada pizza.

Suponiendo que una pizza incluye el ingrediente t con probabilidad p_t , independiente de todo lo demás, y que los ingredientes siempre son agregados en el mismo orden (del 1 al T , saltandose aquellos que no se incluyen en la orden), conteste:

1. (2 puntos) Modele el proceso de preparación de pizzas (pre-horno) como una red de colas. Indique las tasas externas de llegada, tasas efectivas de llegada (calculelas!), las condiciones de estado estacionario, y el tipo de cola de cada subsistema.
(Hint: considere cada ingrediente como una cola.)
2. (1 punto) Cuanto demora en promedio una orden en ser procesada en el largo plazo? (Incluya el tiempo en el horno.)
3. (1 punto) Después de varias horas de operación usted se da cuenta que no hay ningún cocinero colocando el ingrediente más popular. Cual es la probabilidad que no haya tampoco ningún cocinero colocando el ingrediente menos popular?
4. (2 puntos) Suponga ahora que los cocineros llevan las pizzas a cocineros especializados en cada ingrediente. Por un lado, los cocineros son mucho más rápidos; el cocinero especializado en el ingrediente t demora un tiempo exponencial de media $1/\mu_t^e$ en colocar el ingrediente. Por otro lado, dado que existe un solo cocinero especializado, las pizzas deben esperar su turno para ser procesadas por este cocinero. Suponiendo que $\mu_t^e = \alpha\mu_t$, para que valores de $\alpha > 0$ este nuevo proceso resulta en tiempos de proceso más cortos (en promedio)?