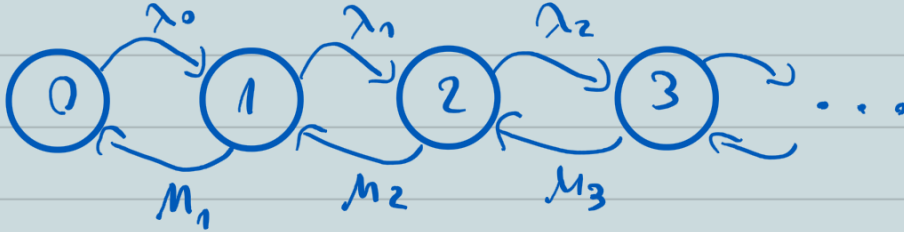


Resumen Colas

Proc. Nacimiento y Muerte

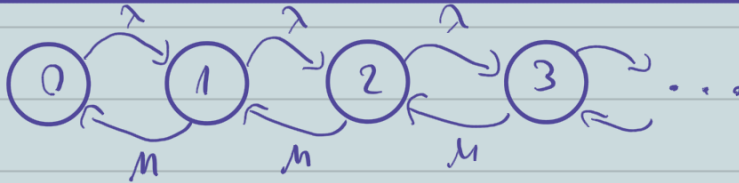
Considere un proceso estocástico que representa el tamaño de una población de individuos: cuando la población tiene tamaño $k \geq 0$ individuos *nacen* de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_k y el tiempo hasta la primera muerte de alguno de estos k individuos se distribuye $\exp(\mu_k)$, $k \geq 1$.



Notación de Kendall : A|B|C|D|E|F

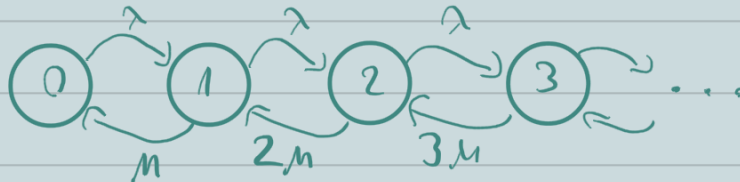
↳ proc. llegadas | t. servicio | servidores | capacidad | población | disc. atención

M|M|1



$$\pi_i = \rho^i (1-\rho) \quad \text{Cond. est: } \rho = \lambda/\mu < 1$$

M|M|∞



$$\pi_i = \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho}$$

Siempre hay prob. est.

Lema 6.1 (S. Ross - Lemma 5.6.2) Considere una fila M/M/C. Si $\lambda < C\mu$ (condición de estado estacionario), entonces el proceso de salida de entidades, en estado estacionario, es un proceso de Poisson de tasa λ .

Proposición 5.4. Consideremos una cadena reversible, con probabilidad estacionaria π y conjunto de estados E . Si truncamos esta cadena a $A \subset E$ y el proceso resultante consiste en una sola clase, entonces la cadena truncada es reversible y posee probabilidades estacionarias π^A , donde

$$\pi_j^A = \frac{\pi_j}{\sum_{i \in A} \pi_i}, \quad i \in A.$$

Ley de Little

$$L = W \cdot \lambda$$

(promedio entidades sistema = tiempo promedio estadía · tasa de llegada)

Métricas adicionales. Normalmente nos interesa calcular los tiempos promedios de estadía en el subsistema de espera y en el de servicio, y lo mismo para el número promedio de entidades. Utilizando los subíndices q y s para denotar dichos subsistemas, tenemos que

$$L = L_s + L_q, \quad W = W_s + W_q,$$

$$M/M/1 \quad L = \lambda / (\mu - \lambda) \quad W = 1 / (\mu - \lambda)$$

$$M/M/\infty \quad L = \rho \quad W = 1 / \mu$$

Redes de Colas

Consideremos un sistema con k estaciones: las llegadas a la estación i desde el exterior forman un proceso de Poisson con tasa λ_i ; esta estación cuenta con c_i servidores, cada uno de los cuales demora un tiempo aleatorio de distribución exponencial de tasa μ_i en atender a una entidad; una vez atendida, una entidad se dirige a la estación j con probabilidad $P_{i,j}$, independiente de todo lo demás.

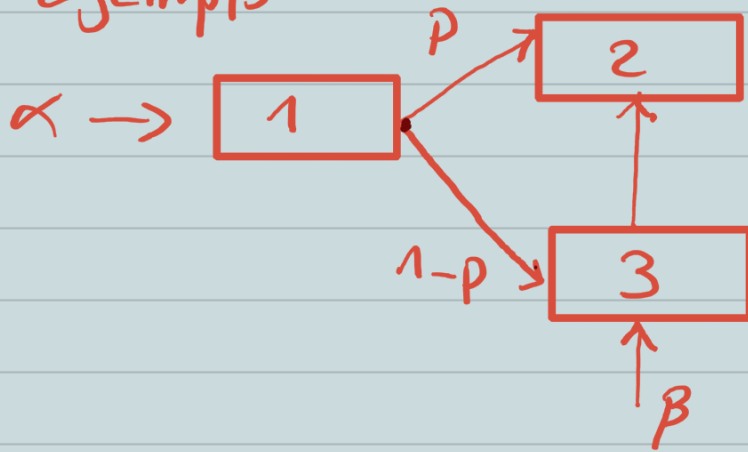
P_{ij} : Transición de estación i a j

G : grafo que caracteriza la red

cada estación j tiene una tasa efectiva de llegada $\bar{\lambda}_j$ y una tasa externa λ_j

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j + \sum_i P_{ij} \bar{\lambda}_i$$

Ejemplo:



$$\bar{\lambda}_1 = \alpha$$

$$\bar{\lambda}_2 = \alpha + \beta$$

$$\bar{\lambda}_3 = \beta + \alpha(1-p)$$

Proposición 5.2 (Probabilidades estacionarias red de colas) En la red de colas con matriz de ruteo P arbitraria, si $\bar{\lambda}_i < c_i \mu_i$, para todo $i \leq k$, tenemos que el vector de probabilidades estacionarias está dado por

$$\pi(n_1, \dots, n_k) = \prod_{j=1}^k \pi_j(n_j),$$

donde π_j corresponde a las probabilidades estacionarias de una cola $M/M/c_j$ con llegada Poisson de tasa $\bar{\lambda}_j$ y atenciones exponenciales de tasa μ_j , donde $\{\lambda_i, i \leq k\}$ corresponde a la solución del sistema lineal.

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j + \sum_i P_{i,j} \bar{\lambda}_i, \quad j \leq k.$$

Adicionalmente, en estado estacionario: i) las salidas hacia el exterior desde la estación i forman un proceso de Poisson de tasa $\bar{\lambda}_i(1 - \sum_j P_{i,j})$; y ii) el número de entidades en las distintas estaciones son variables aleatorias independientes.