Pauta Auxiliar #6

Procesos de Poisson II

Problema 1 - Despacho óptimo

En una planta de procesamiento el número de productos terminados está dado por un proceso de Poisson homogéneo de tasa λ. Una vez terminados, los productos se almacenan hasta que son despachados a los puntos de venta. Hasta ahora, se realiza un único despacho a tiempo fijo T, pero la empresa quiere incorporar otro despacho en un tiempo intermedio t, con el fin de minimizar el tiempo esperado acumulado de almacenamiento de los productos $W(t)$. Suponga que en ambos despachos se retiran todos los productos en bodega.

a) Pruebe que

$$\mathbb{E}(W(t)) = \frac{\lambda t^2}{2} + \frac{\lambda(T-t)^2}{2}.$$

Solución: El hecho que el número de productos sea un PPH, que llamaremos N, nos da estructura e información.

- A tiempo t, el número de productos terminados está dado por $N(t) \sim pois(\lambda t)$, y al despacharlos todos, para el tiempo final T, habrán $N(T) - N(t)$ productos.
- El i-ésimo producto es terminado a tiempo $S_i \sim gamma(i, \lambda)$ (tiempo de llegada) y se almacena desde ese momento hasta su despacho.

Luego, podemos escribir el tiempo acumulado de almacenamiento diferenciando entre los productos que se van en el primer y segundo despacho.

$$W(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)}_{W_1(t)} + \underbrace{\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)} (T - S_i)}_{W_2(t)}.$$

Para calcular $\mathbb{E}(W_1(T))$, condicionamos sobre el valor de $N(t)$, multiplicando por la probabilidad respectiva y sumando sobre todas las opciones posibles (probabilidades totales)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_1(t)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (t - S_i) \middle| N(t) = n\right) \mathbb{P}(N(t) = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(nt - \sum_{i=1}^{n} S_i \middle| N(t) = n\right) \mathbb{P}(N(t) = n).
\end{aligned}
$$

Recordando que las llegadas condicionales distribuyen como los estadísticos de orden de uniformes i.i.d., consideremos $U_1, \ldots, U_n$ uniformes en $[0, t]$ i.i.d, entonces los $S_1, \ldots, S_n$ dentro de la **esperanza condicional a** $N(t) = n$ pueden cambiarse por $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}$. Más aún, como el **resultado de la suma no depende del orden**, podemos usar simplemente las uniformes originales (sin ordenar).

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(nt - \sum_{i=1}^{n} S_i | N(t) = n\right) &= \mathbb{E}\left(nt - \sum_{i=1}^{n} U_{(i)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(nt - \sum_{i=1}^{n} U_i\right) \\
&= nt - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) \\
&= nt - n\frac{t}{2} = \frac{nt}{2}.
\end{aligned}
$$

Reemplazando, obtenemos que

$$
\mathbb{E}(W_1(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{2} \mathbb{P}(N(t) = n) = \frac{t}{2} \mathbb{E}(N(t)) = \frac{t}{2} \lambda t = \frac{\lambda t^2}{2}.
$$

El argumento para $\mathbb{E}(W_2(t))$ es análogo. Una forma de corroborar/justificar esto es aprovechar la pérdida de memoria para *resetear* el proceso en t: consideramos $\tilde{N}$ tal que $\tilde{N}(s) = N(t + s) - N(t)$ que es un PPH con la misma tasa λ y modela el número de productos terminados **desde el primer despacho**, con lo cual

$$
\mathbb{E}(W_2(t)) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=N(t)+1}^{N(T)} (T - S_i)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\tilde{N}(T-t)} ((T - t) - \tilde{S}_i)\right) = \mathbb{E}(W_1(T-t)) = \frac{\lambda(T - t)^2}{2}.
$$

b) Determine el tiempo intermedio óptimo t^* para hacer el nuevo despacho.

Solución: Notando que la forma explícita de la función $t \mapsto \mathbb{E}(W(t))$ encontrada en a) es convexa y diferenciable (cuadrática), podemos encontrar el mínimo igualando la derivada a cero:

$$
\frac{d}{dt} \mathbb{E}(W(t)) = \lambda(2t - T) = 0 \Leftrightarrow t = T/2.
$$

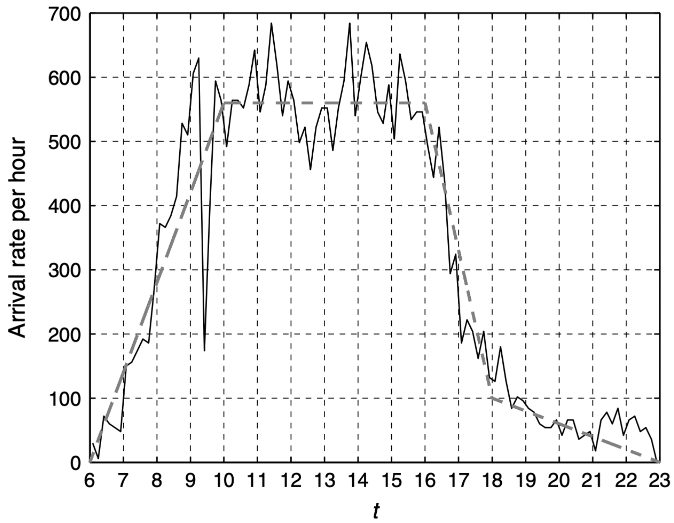

Figura 1: Tasas de llamada empírica y ajuste lineal por pedazos.

Problema 2 - Modelo para call center

Un call center contrata una nueva gerente de operaciones para mejorar la disposición horaria de los ejecutivos. Ella reconoce inmediatamente que la disposición actual está basada en el modelamiento de las llamadas como un proceso de Poisson homogéneo de tasa $\lambda = 317[llamadas/hora]$, por lo que pide hacer un estudio empírico de las tasas de llamadas a distintas horas, obteniendo el gráfico de la Figura 1.

a) ¿Es válida la suposición de que el proceso de llamadas es homogéneo? Describa un modelo más preciso.

Solución: Observamos en la Figura 1 que la tasa a la que entran las llamadas no es constante en el tiempo, por lo que un modelo más preciso sería considerar el proceso de llamadas como un PPNH y definir la función de tasa $\lambda(t) = f(t+6)$, donde f es el ajuste lineal sugerido en el gráfico:

$$f(t) = \begin{cases} 140(t-6), & t \in [6, 10] \\ 560, & t \in [10, 16] \\ 560 - 230(t-16), & t \in [16, 18] \\ 100 - 20(t-18), & t \in [18, 23]. \end{cases}$$

Cabe destacar que el valor promedio de la función de tasa coincide con la tasa fija $\lambda = 317$ del PPH original.

b) Calcule para ambos modelos: el número esperado de llamadas entre 6 y 7, y la probabilidad de que la primera llamada sea entre 7 y 8. Discuta qué implicancias tiene para la decisión de la nueva gerente.

Solución: Consideremos un PPH N_H de tasa $\lambda = 317$ y un PPNH N_N con función de tasa $\lambda(t)$. El número de llamadas entre 6 y 7 está dado por $N_i(1)$, $i = H, N$, que en ambos casos distribuye poisson pero los parámetros, que representan justo el valor esperado, son distintos.

- El parámetro y valor esperado de $N_H(1)$ es $\lambda = 317$.
- El parámetro y valor esperado de $N_N(1)$ es

$$m(0,1) = \int_0^1 \lambda(t)dt = \int_0^1 f(t+6)dt = \int_0^1 140tdt = 70t^2\Big|_0^1 = 70.$$

Para calcular ahora la probabilidad pedida, notamos que corresponde al evento de que en la primera hora no llegue ninguna llamada, y al menos una entre la primera y segunda hora:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_i(1) = 0, N_i(2) - N_i(1) \geq 1) &= \mathbb{P}(N_i(1) = 0)\mathbb{P}(N_i(2) - N_i(1) \geq 1)\\ &= \mathbb{P}(N_i(1) = 0)(1 - \mathbb{P}(N_i(2) - N_i(1) = 0)),\end{aligned}$$

donde ocupamos que los incrementos son independientes.

- Sabemos que $N_H(1) \sim pois(\lambda)$, pero también $N_H(2) - N_H(1) \sim pois(\lambda)$, al ser un incremento de 1 hora. Así, la probabilidad es $e^{-317}(1 - e^{-317})$.
- En el caso no homogéneo, no tenemos incrementos estacionarios: $N_N(1) \sim pois(m(0,1))$, pero $N_N(2) - N_N(1) \sim poism(1,2)$, donde

$$m(1,2) = \int_1^2 \lambda(t)dt = 70t^2\Big|_1^2 = 210.$$

  Luego, la probabilidad es $e^{-70}(1 - e^{-210})$.

Problema 3

El área de Fiscalización del Ministerio de Transportes quiere comprobar en terreno que los operadores de buses estén cumpliendo con las tasas acordadas de frecuencias de sus flotas. Para ello se enviará a un inspector a un paradero, en que, desde un tiempo inicial $t_0 = 0$ pasan buses siguiendo un proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ de tasa $\lambda > 0$.

El inspector llega al paradero y pregunta al vendedor de la tienda de sopaipillas del frente cuánto ha sido el tiempo desde la última vez que pasó un bus, lo que anota como T_1. Luego toma el tiempo T_2 hasta el primer bus que pasa, y reporta como intervalo entre buses la suma $T := T_1 + T_2$.

a) Justifique que la estimación del intervalo dada por el inspector, en promedio, es mayor que el tiempo promedio de espera real entre buses. ¿A qué se debe este error?

Solución. Notamos que, por la perdida de memoria de la exponencial, tenemos que $E[T_2] = 1/\lambda$. Dado que $E[T_1] > 0$, tenemos que $E[T] > 1/\lambda$, pero el tiempo promedio de espera es $1/\lambda$, que es lo que queríamos probar.

El error viene del hecho que el inspector no considera que es suficiente considerar el tiempo que demora en llegar el siguiente bus solamente, por la perdida de memoria de la exponencial.

b) Muestre que si el inspector llega en un instante t y han pasado n buses desde el comienzo del proceso ($t_0 = 0$), entonces el intervalo que reporta el inspector está dado (en promedio) por

$$E[T|N(t) = n] = \frac{1}{\lambda} + \frac{t}{n+1}.$$

Solución. Si el inspector llega en t y han pasado n buses (o sea condicional a $N(t) = n$), podemos expresar $T_1 = t - S_n$, porque S_n es el tiempo de la n-ésima llegada, que bajo ese condicional es la última antes de t. Además, condicional en que $N(t) = n$, los tiempos de llegadas desordenados se distribuyen como n variables iid $U(0,t)$. Entonces, considerando $U_i \sim U(0,t)$ para $i \leq n$, independientes, tenemos que S_n distribuye como $U_{(n)} = \text{máx}\{U_i : i \leq n\}$ y

$$E[T_1|N(t) = n] = E[t - \text{máx}\{U_i : i \leq n\}]$$

Consideremos que

$$P(\text{máx}\{U_i : i \leq n\} \leq x) = P(\cap_{i=1}^{n}\{U_i \leq x\}) = \prod_{i=1}^{n} P(U_i < x) = \left(\frac{x}{t}\right)^n.$$

Por lo tanto, la densidad del máximo $f\text{max}(\cdot)$ está dada por

$$f\text{max}(x) = \frac{\partial P(\text{máx}\{U_i : i \leq n\} \leq x)}{\partial x} = \frac{n}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{n-1}.$$

Entonces, tenemos que

$$E[\text{máx}\{U_i : i \leq n\}] = \int_0^t x\,\frac{n}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{t^n}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^t = \frac{n}{n+1}t.$$

Por otro lado, ya sabemos que $E[T_2|N(t) = n] = 1/\lambda$. Con esto concluimos que

$$E[T|N(t) = n] = E[T_1|N(t) = n] + E[T_2|N(t) = n] = t - \frac{n}{n+1}t + \frac{1}{\lambda} = \frac{t}{n+1} + \frac{1}{\lambda}.$$

c) Concluya que si el tiempo de llegada del inspector es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa μ (independiente de todo), entonces el intervalo de tiempo que reportará el inspector tiene esperanza

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

Solución. Supongamos que el tiempo de llegada X del inspector es $X = t$. De la parte anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
E[T|X=t] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[T|X=t,\, N(t)=n] P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{t}{n+1}\right) P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{t}{n+1}\right) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n}}{n!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n}}{n!} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}
E[T] &= \int_0^{\infty} E[T|X=t] \mu\, e^{-\mu t} dt \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right) \mu\, e^{-\mu t} dt \\
&= \frac{2}{\lambda} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\mu}{\lambda} e^{-\mu t} dt \\
&= \frac{2}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\mu+\lambda} \int_0^{\infty} (\mu+\lambda)\, e^{-(\mu+\lambda)\, t} dt \\
&= \frac{2}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\mu+\lambda} = \frac{1}{\lambda(\mu+\lambda)} (\mu + 2\lambda)) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

d) Analice y justifique los casos límite $\mu \to 0, \mu \to +\infty$.

Solución. Cuando $\mu \to \infty$ tenemos que $P(X > \epsilon) = e^{-\mu\epsilon} \to 1$, es decir, en el limite $X = 0$. En este caso el inspector llega en $t = 0$, por lo que su estimación

$$\lim_{\mu\to\infty} E[T] = \frac{1}{\lambda} + \lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{1}{\lambda}$$

es correcta.

Por otro lado, cuando $\mu \to 0$ tenemos que $P(X \le M) = 1 - e^{-\mu M} \to 0$, es decir, en el limite $X \to \infty$. En este caso la estimación del inspector es

$$\lim_{\mu\to 0} E[T] = \frac{1}{\lambda} + \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{\lambda+\mu} = \frac{2}{\lambda}.$$

En este caso, la estimación se puede explicar por que en el largo plazo, el tiempo hasta que pasa el próximo bus debiese distribuirse igual que el tiempo desde que pasó el bus pasado. Por lo tanto, en el largo plazo, la distribución T_1 es exponencial con tasa λ (sabemos que este es siempre el caso para T_2).