INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3272 - Decisiones Bajo Incertidumbre
Profesor: D. Sauré
Auxiliares: Nicolás Acevedo, Benjamín Barrientos,
Pablo Paredes, Matías Romero, Ignacia Segura, Pablo Ubilla.

Auxiliar #6

Procesos de Poisson II

Problema 1 - Despacho óptimo

En una planta de procesamiento el número de productos terminados está dado por un proceso de Poisson homogéneo de tasa λ. Una vez terminados, los productos se almacenan hasta que son despachados a los puntos de venta. Hasta ahora, se realiza un único despacho a tiempo fijo T, pero la empresa quiere incorporar otro despacho en un tiempo intermedio t, con el fin de minimizar el tiempo esperado acumulado de almacenamiento de los productos $W(t)$. Suponga que en ambos despachos se retiran todos los productos en bodega.

a) Pruebe que
$$\mathbb{E}(W(t)) = \frac{\lambda t^2}{2} + \frac{\lambda(T-t)^2}{2}.$$

b) Determine el tiempo intermedio óptimo t^* para hacer el nuevo despacho.

Problema 2 - Modelo para call center

Un call center contrata una nueva gerente de operaciones para mejorar la disposición horaria de los ejecutivos. Ella reconoce inmediatamente que la disposición actual está basada en el modelamiento de las llamadas como un proceso de Poisson homogéneo de tasa $\lambda = 317[llamadas/hora]$, por lo que pide hacer un estudio empírico de las tasas de llamadas a distintas horas, obteniendo el gráfico de la Figura 1.

a) ¿Es válida la suposición de que el proceso de llamadas es homogéneo? Describa un modelo más preciso.

b) Calcule para ambos modelos: el número esperado de llamadas entre 6 y 7, y la probabilidad de que la primera llamada sea entre 7 y 8. Discuta qué implicancias tiene para la decisión de la nueva gerente.

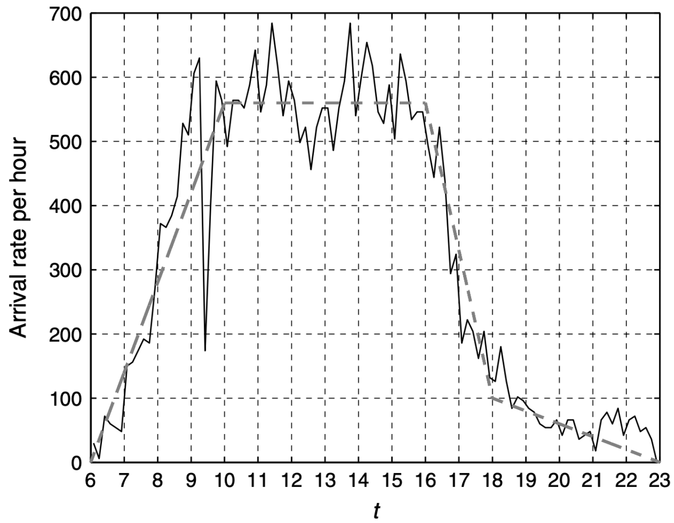

Figura 1: Tasas de llamada empírica y ajuste lineal por pedazos.

Problema 3 - C2 Primavera 2019

El área de Fiscalización del Ministerio de Transportes quiere comprobar en terreno que los operadores de buses estén cumpliendo con las tasas acordadas de frecuencias de sus flotas. Para ello se enviará a un inspector a un paradero, en que, desde un tiempo inicial $t_0 = 0$ pasan buses siguiendo un proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ de tasa $\lambda > 0$.

El inspector llega al paradero y pregunta al vendedor de la tienda de sopaipillas del frente cuánto ha sido el tiempo desde la última vez que pasó un bus, lo que anota como T_1. Luego toma el tiempo T_2 hasta el primer bus que pasa, y reporta como intervalo entre buses la suma $T := T_1 + T_2$.

a) Justifique que la estimación del intervalo dada por el inspector, en promedio, es mayor que el tiempo promedio de espera real entre buses. ¿A qué se debe este error?

b) Muestre que si el inspector llega en un instante t y han pasado n buses desde el comienzo del proceso ($t_0 = 0$), entonces el intervalo que reporta el inspector está dado (en promedio) por
$$E[T|N(t) = n] = \frac{1}{\lambda} + \frac{t}{n+1}.$$

c) Concluya que si el tiempo de llegada del inspector es una variable aleatoria de distribución exponencial de tasa μ (independiente de todo), entonces el intervalo de tiempo que reportará el inspector tiene esperanza
$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

d) Analice y justifique los casos límite $\mu \to 0, \mu \to +\infty$.