Pauta Auxiliar Extra

Prof: Rahmi Ilkilic
Auxiliares: Daniel Abarca - Pablo Ubilla - Marco Olguin - Paz Montaño Kerdy - Araceli Ramírez

Pregunta 1 Riesgo Moral- C2.2020

Un emprendedor desea contratar un practicante para su Start-Up. El practicante puede elegir un nivel de esfuerzo $e \in \{L, H\}$ teniendo un costo c_L y c_H respectivamente. El proyecto es exitoso con probabilidad p_H si $e = H$ y p_L si $e = L$ con $0 < p_L < p_H < 1$. El emprendedor paga un salario ω_0 si el proyecto no es exitoso y un salario ω_1 si resulta exitoso. La función de utilidad del trabajador viene dada por $u(\omega_i) - c_e$ con $i \in \{0, 1\}$. Considere que $u'(\omega) > 0, u''(\omega) < 0$. La utilidad de reserva es $\bar{U}$. En caso de ser exitoso el emprendedor recibe x_1 y de lo contrario x_0, con $x_1 > x_0$

a. Suponga que el esfuerzo es verificable: Escriba el problema al que se enfrenta el emprendedor si este desea implementar $e = L$. ¿ Y si desea implementar $e = H$?

El emprendedor resuelve para $e = L$:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{\omega_1, \omega_0}\, p_l (x_1 - \omega_1) + (1 - p_l)(x_0 - \omega_0) \\ &\text{s.a.} \\ &p_l (u(\omega_1) - c_l) + (1 - p_l)(u(\omega_0) - c_l) \geq \bar{U} \ (1) \end{aligned}$$

Por otro lado si desea implementar $e = H$

$$\text{máx}_{\omega_1, \omega_0}\, p_h (x_1 - \omega_1) + (1 - p_h)(x_0 - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} &\text{s.a.} \\ &p_h (u(\omega_1) - c_h) + (1 - p_h)(u(\omega_0) - c_h) \geq \bar{U} \ (2) \end{aligned}$$

Con (1) y (2) las restricciones de Participación Voluntaria para cada caso.

Ahora escribimos la ecuación de Larange:

- Si el emprendedor resuelve para $e = L$:

$$\begin{aligned} = p_l (x_1 - \omega_1) + (1 - p_l)(x_0 - \omega_0) + \lambda[p_l (u(\omega_1) - c_l) + \\ (1 - p_l)(u(\omega_0) - c_l) - \bar{U}] \end{aligned} \tag{1}$$

- Si el emprendedor resuelve para $e = H$:

$$\begin{aligned} &= p_h \left(x_1 - \omega_1\right) + \left(1 - p_h\right)\left(x_0 - \omega_0\right) + \lambda[p_h \left(u\left(\omega_1\right) - c_h\right) \\ &\qquad + \left(1 - p_h\right)\left(u\left(\omega_0\right) - c_h\right) - \bar{U}] \end{aligned} \tag{2}$$

Y lo derivamos respecto a los salarios

- Si el emprendedor resuelve para $e = L$:

$$\begin{aligned} &= p_l \left(x_1 - \omega_1\right) + \left(1 - p_l\right)\left(x_0 - \omega_0\right) + \lambda[p_l \left(u\left(\omega_1\right) - c_l\right) + \\ &\qquad \left(1 - p_l\right)\left(u\left(\omega_0\right) - c_l\right) - \bar{U}] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_1} = -p_l + p_l \lambda u'(w_1) = 0 \, y \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_0} = -\left(1 - p_l\right) + \left(1 - p_l\right)\lambda u'(w_0) = 0$$

$$\rightarrow u'(w_1) = \frac{1}{\lambda}, u'(w_0) = \frac{1}{\lambda}$$

Como u es una función creciente y cóncava $w_1 = w_0 = w^*$. El salario no va a depender del resultado cuando observamos el esfuerzo perfectamente (verificable). En el caso del emprendedor que resuelve para $e = H$:, se tiene el mismo resultado.

Como el principal quiere maximizar su pago, la restricción de participación es activa, es decir:

- Caso bajo esfuerzo - c_l:

$$\begin{aligned} &p_l(u(w)\breve{}c_l) + (1 - p_l)(u(w)\breve{}c_l) = \bar{U} \\ &\rightarrow p_l * u(w)\breve{}p_l * c_l + u(w)\breve{}p_l * u(w)\breve{}c_l + p_l * c_l = \bar{U} \\ &\rightarrow u(w)\breve{}c_l = \bar{U} * \text{Recompensa justa} \end{aligned}$$

La compensación justa de la cantidad para compensarle al agente dado su esfuerzo bajo estará dada por:

$$u(w) = \bar{U} - c_l$$

** Como u(w) es función cóncava y creciente tiene una función inversa y se puede escribir el salario en términos de la función inversa:

$$w^* = u^{-1}(\bar{U} - c_l) = \bar{U}$$

Este es el salario que compensa al agente cuando se realiza un esfuerzo bajo.

- Caso bajo esfuerzo - c_l:

$$w^* = u^{-1}(\bar{U} - c_l) = \bar{U}$$

- Caso alto esfuerzo - c_h:

De forma análoga se obtiene que el salario óptimo cuando se realiza un esfuerzo alto es:

$$w^* = u^{-1}(\bar{U} - c_h)$$

En ambos casos se tiene que:

- Si el nivel óptimo del esfuerzo para el principal es $e = L$, entonces $w^* = u^{-1}(\bar{U} - c_l) = \bar{U}$, debe pagar a la gente el mínimo valor posible que convence al agente a firmar el contrato.
- Si el nivel óptimo del esfuerzo para el principal es $e = H$, entonces $w^* = u^{-1}(\bar{U} - c_h)$

Finalmente: - ojo esto no se pedia en el enunciado pero para que puedan tener mayor alcance de que es lo que estamos realizando.

El pago del principal es $p_e(x_1) + (1 - p_e)(x_0) - w^*$y el esfuerzo $e = H$ es óptimo cuando: $p_H(x_1) + (1 - p_H)(x_0) - u^{-1}(\bar{U} - c_h) \geq p_L(x_1) + (1 - p_L)(x_0) - -u^{-1}(\bar{U} - c_l)$

En español: El pago del principal bajo esfuerzo alto es mayor que el pago del principal bajo esfuerzo bajo.

b. Suponga ahora que el esfuerzo es NO verificable: Escriba y resuelva el problema al que se enfrenta el emprendedor si este desea implementar $e = L$.Ẏ si desea implementar $e = H$?

- Para implementar $e = L$

$$\begin{aligned}
&\max_{\omega_1,\omega_0} p_l\left(x_1 - \omega_1\right) + \left(1 - p_l\right)\left(x_0 - \omega_0\right) \\
&\text{ s.a.} \\
&p_l\left(u\left(\omega_1\right) - c_l\right) + \left(1 - p_l\right)\left(u\left(\omega_0\right) - c_l\right) \geq \bar{U} \ (3) \\
&{*}p_l u\left(\omega_1\right) + \left(1 - p_l\right) u\left(\omega_0\right) - c_l \geq p_h u\left(\omega_1\right) + \left(1 - p_h\right) u\left(\omega_0\right) - c_h \ ({*})
\end{aligned}$$

*** Cuando no se puede observar un esfuerzo debemos asegurar que ocurra (4), de esta forma nos aseguramos que el agente (practicante) salga mejor pagado cuando elige el esfuerzo mayor , que cuando eligue el esfuerzo menor, pagamos a la gente diferentes salarios con diferentes resultados

Acá nos podemos dar cuenta que la restricción 4 (Restricción de Incentivos Compatibles) es redundante, ya que no tiene sentido para el trabajador esforzarse $e = H$ si recibirá un pago para esforzarse $e = L$, esto se debe a que $c_h > c_l$.

Calculamos el multiplicador de Lagrange asociado:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\omega_1, \omega_0, \lambda\right) = p_l\left(x_1 - \omega_1\right) + \left(1 - p_l\right)\left(x_0 - \omega_0\right) + \\
\lambda\Big(p_l\left(u\left(\omega_1\right) - c_l\right) + \left(1 - p_l\right)\left(u\left(\omega_0\right) - c_l\right) - \bar{U}\,\Big)
\end{aligned} \tag{4}$$

La Condición de Primer Orden para el Lagrangiano:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_0} = -\left(1 - p_l\right) + \lambda\left[\left(1 - p_l\right)\left(u'\left(\omega_o\right)\right] = 0\right.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1} = -p_l + \lambda\left[-p_l\left(u'\left(\omega_1\right)\right] = 0\right.$$

De ambas ecuaciones se desprende que:

$$\lambda = \frac{1}{u'(\omega_o)} = \frac{1}{u'(\omega_1)}$$

Por enunciado $u(\cdot)$ es una función estrictamente creciente, por lo que necesariamente $\omega_1 = \omega_o = \omega$.

Reemplazamos en la condición de PV: (Participación Voluntaria)

$$\text{s.a. } p_l\left(u\left(\omega_1\right)-c_l\right)+\left(1-p_l\right)\left(u\left(\omega_0\right)-c_l\right) \geq \bar{U} \ (3)$$

$$p_l\left(u(\omega)-c_l\right)+\left(1-p_l\right)\left(u(\omega)-c_l\right)=\bar{U}$$

Obtenemos $u(\omega) = c_l + \bar{U}$ y para despejar el salario tomamos la inversa de la función $u'(\cdot)$ y$\omega = u^{-1}\left(c_l+\bar{U}\right)$

- Ahora para implementar $e = H$:

$$\max_{\omega_1,\omega_0} p_h\left(x_1-\omega_1\right)+\left(1-p_h\right)\left(x_0-\omega_0\right)$$

s.a.

$$p_h\left(u\left(\omega_1\right)-c_h\right)+\left(1-p_h\right)\left(u\left(\omega_0\right)-c_h\right) \geq \bar{U} \ (5)$$
$$*p_h u\left(\omega_1\right)+\left(1-p_h\right) u\left(\omega_0\right)-c_h \geq p_l u\left(\omega_1\right)+\left(1-p_l\right) u\left(\omega_0\right)-c_l \ (6)$$

*** Cuando no se puede observar un esfuerzo debemos asegurar que ocurra (6) restricción 4 (Restricción de Incentivos Compatibles), de esta forma nos aseguramos que el agente (practicante) salga mejor pagado cuando elige el esfuerzo mayor , que cuando elige el esfuerzo menor, pagamos a la gente diferentes salarios con diferentes resultados, en este caso, esta restricción no resulta redundante, esto se debe a que $c_h > c_l$ Mucho OJOOOOOOO! ACAAAAAAAA ponganse en los casos que los costos fuesen difernrtes Cuidado

Calculamos el multiplicador de Lagrange asociado:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\omega_1,\omega_0,\lambda\right)=p_h\left(x_1-\omega_1\right)+\left(1-p_h\right)\left(x_0-\omega_0\right)+\\ \lambda\left[p_h\left(u\left(\omega_1\right)-c_h\right)+\left(1-p_h\right)\left(u\left(\omega_0\right)-c_h\right)-\bar{U}\right]+\\ \mu[p_h u\left(\omega_1\right)+\left(1-p_h\right) u\left(\omega_0\right)-c_h-p_l u\left(\omega_1\right)-\left(1-p_l\right) u\left(\omega_0\right)+c_l]\end{aligned} \quad (5)$$

Luego de calcular $\mathcal{L}\left(\omega_1,\omega_0,\lambda,\mu\right)$ obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{u'\left(\omega_0\right)}=\lambda+\mu\left[1-\frac{1-p_l}{1-p_h}\right]$$

$$\frac{1}{u'\left(\omega_1\right)}=\lambda+\mu\left[1-\frac{p_l}{p_h}\right]$$

Pregunta 2 Juegos Repetidos - C2.2021

Dos jugadores juegan(repiten) el juego abajo por dos períodos y calculan su pago total sin descuento.

	A	B	C
A	x + 1, x + 1	0, 0	x + y + 5, 0
B	0, 0	x + 5, x + 5	0, 0
C	0, x + y + 5	0, 0	x + y + 3, x + y + 3

Encuentre todos los equilibrios subjuego perfectos en estrategias puras del juego repetido.

Solución: Notemos que hay 2 EN en estrategias puras, que son (A,A) y (B,B), por lo que ya tenemos algunos subjuegos que resultan de jugar algunas de estas estrategias en ambos período.

$$EPS_1 = (A, A) \rightarrow (A, A)$$
$$EPS_2 = (A, A) \rightarrow (B, B)$$
$$EPS_3 = (B, B) \rightarrow (A, A)$$
$$EPS_4 = (B, B) \rightarrow (B, B)$$

Por otro lado, hay un EPS de cooperación que resulta de la comunicación que es (C,C). Así, definimos un equilibrio del tipo premio-castigo para ambos jugadores:

t=1: Jugar C

t=2: Juega A si se jugó C,C en primer período y juega B sino.

Así, hemos definido el EPS_{coop} del juego repetido.

Pregunta 3 - Licitación de Segundo Precio - C2. 2021

Considere el valor de x,y,z como los últimos 3 dígitos de el número telefónico de su ex:

Un vendedor va a organizar una licitación sobre cerrado de segundo precio para vender un objeto. Hay 3 oferentes. Valor de oferente $1, v_1$, es 1 o x cada con probabilidad 1/2. Valor de oferente $2, v_2$, es 1 o y cada con probabilidad 1/2. Valor de oferente $3, v_3$, es 1 o z cada con probabilidad 1/2. Las probabilidades sobre los valores de los oferentes son independientes entre los oferentes. Los valores son información privada de los oferentes pero los oferentes saben las distribuciones de valores de los otros oferentes.

Suponga que en el equilibrio todos los oferentes van a ofrecer su valor verdadero en esa licitación de segundo precio.

a. Calcule el ingreso esperado del vendedor.

Respuesta: Hay 8 posibles realizaciones de valoraciones (v_1, v_2, v_3); $r_1 = (1,1,1)$, $r_2 = (x,1,1)$, $r_3 = (1,y,1)$, $r_4 = (1,1,z)$, $r_5 = (x,y,1)$, $r_6 = (1,y,z)$, $r_7 = (x,1,z)$ y $r_8 = (x,y,z)$

Cada una con probabilidad 1/8. En cada realización, el ingreso del vendedor es la segunda valoración más alta. Si respresentamos la segunda valoración más alta de una realización r_i con p_i, entonces el ingreso esperado es

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8} p_i$$

b. El vendedor decide cobrar una tasa de entrada a los oferentes que quieren participar. Este pago es igual a 2. Los oferentes, después de aprender su valor propio, deciden participar a la licitación (pagando la tasa irrecuperable de 2) o no participar(y no pagar). Calcule el ingreso esperado del vendedor con esa tasa de entrada. (Suponga que si sólo un oferente participa en la licitación, gana el objeto al precio 0.)

Igualmente, hay 8 posibles realizaciones de valoraciones (v_1, v_2, v_3); $r_1 = (1,1,1)$, $r_2 = (x,1,1)$, $r_3 = (1,y,1)$, $r_4 = (1,1,z)$, $r_5 = (x,y,1)$, $r_6 = (1,y,z)$, $r_7 = (x,1,z)$ y $r_8 = (x,y,z)$

Cada una con probabilidad 1/8. Si un oferente tiene una valorización menos de 2, no va a participar en la licitación.

EJEMPLO: Suponga qeu el número de telefono esta dado po +56975213989, en este caso los valores de $(x, y, z) son (9, 8, 9)$

Entonces, nos encontramos en el caso en donde tenemos $x \leq y \leq z$.

En este caso hay 2 equilibrios porque , El Oferente 1 va a ganar el objeto sólo en r_2. Entonces utilidad esperada de oferente 1 (si participa cuando su valoración es x) es $\frac{1}{4} \cdot (x-2) + \frac{3}{4} \cdot (-2) = \frac{x-8}{2}$. Eso significa que cuando tenemos $x \leq y \leq z$, oferente 1 será indiferente entre participar o no participar si tiene una valoración de 8, su utilidad esperada va a ser de cero, los que tienen una valoración encima de 8 quieren participar y los que tiene una valoración de 8 son indeferentes entre participar y no participar. Oferente 2 es indiferente.

- Cada oferente participa cuando su valoración no es 1 . Ingreso esperado es:

$$\frac{1}{8}(0) + \frac{1}{8}(2) + \frac{1}{8}(2) + \frac{1}{8}(2) + \frac{1}{8}(2+8) + \frac{1}{8}(2+8) + \frac{1}{8}(2+9) + \frac{1}{8}(2+9) = \frac{48}{8} = 6$$

- Sólo participan los oferentes que tienen una valoración de 9: Ingreso esperado es:
  Nos encontramos en las siguientes realizaciones: $r_2 = (x,1,1)$, $r_5 = (x,y,1)$, $r_7 = (x,1,z)$ y $r_8 = (x,y,z)$ Cada con probabilidad condicional 1 / 4 .

$$\frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(2+9) = \frac{15}{4}$$

Más Ejemplos:

Caso I: Si tenemos $x, y, z \leq 2$, nadie va a participar y el ingreso esperado del vendedor con tasa de entrada es de 0.

Caso II: Si tenemos sólo uno de x, y, z mayor de 2 (por ejemplo sólo x), sólo un oferente puede tener una valoración encima de 2 y esto sucede sólo con probabilidad 1/2. Va a participar con probabilidad 1/2. Va a pagar la tasa de entrada, 2, pero va a comprar el objeto al precio 0 porque nadie más va a participar. Entonces el ingreso esperado del vendedor con tasa de entrada de dos, es de $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Caso III: Si tenemos sólo dos de x, y, z mayor de 2 (por ejemplo $x, y > 2$ y $z \leq 2$), sólo dos oferente pueden tener una valoración encima de 2 y cada uno con probabilidad 1/2. El tercer oferente nunca va a participar. Hay 4 posibles realizaciones (suponiendo que $x, y > 2$ y $z \leq 2$). $c_1 = (1, 1)$, $c_2 = (x, 1)$, $c_3 = (1, y)$ y $c_4 = (x, y)$ cada con probabilidad 1/4.

....

Propuesto - completar:

Caso III: Si tenemos sólo dos de x, y, z mayor de 2 (por ejemplo $x, y > 2$ y $z \leq 2$)

- **Subcaso III.a:** Suponemos que $x < y$. Cuando oferente 1 tiene valoración x, estámos en una de dos realizaciones $c_2 = (x, 1)$ y $c_4 = (x, y)$ cada con probabilidad condicional 1/2.
- **Subcaso III.b:** Suponemos que $x = y$. Cuando oferente 1 tiene valoración x, estámos en una de dos realizaciones $c_2 = (x, 1)$ y $c_4 = (x, y)$ cada con probabilidad condicional 1/2.

Caso IV: Si tenemos $x, y, z > 2$. tenemos los siguientes subcasos:

- **Subcaso IV.a:** Si tenemos $x < y < z$. Oferente 1 puede participar sólo cuando su valoración es x y estamos en una de esas realizaciones $r_2 = (x, 1, 1)$, $r_5 = (x, y, 1)$, $r_7 = (x, 1, z)$ y $r_8 = (x, y, z)$, cada con probabilidad condicional 1/4.
- **Subcaso IV.b:** Si tenemos $x \leq y \leq z$. (....)

Propuesto Concesión Casino (Juego Bayesiano)

Dos firmas dedicadas al rubro de la comida desean adjudicarse la concesión de casino en cierta Universidad. Cada firma i ofrece simultáneamente un soborno s_i a la Universidad. La Universidad observa las ofertas y le otorga la concesión a quien le ofrece el soborno más alto y rechaza a la otra firma. Si el soborno de la firma es rechazado, la firma sale al mercado y gana cero. Si el soborno es aceptado, la firma se convierte en monopolista en la Universidad y enfrenta una demanda inversa igual a $P(Q) = 1 - Q$. El costo marginal de cada firma c se distribuye Uniforme en [0,1]. Cada firma conoce su costo marginal, pero desconoce el de su competidor.

a. Una vez que una firma se adjudica la concesión, cuánto produce? Cuáles son sus ganancias?

b. Determine un equilibrio bayesiano simétrico, en el cual ambas firmas ofrecen un soborno de la forma $s_i = a + b\,(1 - c_i)^2$.

c. Suponga que la universidad está interesada en el precio final que pagarán sus alumnos. Tiene incentivos la universidad para aceptar la oferta de la firma que ofrece el soborno más alto?