



Auxiliar #1

Probabilidad Condicional e Independencia

Resumen

- **Ley de De Morgan:**

1. $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$
2. $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$

- **Ley Distributiva:**

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Axiomas de Probabilidad:

- **No-negatividad:** $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$
- **Normalización:** $P(\Omega) = 1$
- **Aditividad:** Si $A_1, A_2, \dots$ disjuntos, $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

Propiedades:

- **Probabilidad del complemento:** $P(A^c) = 1 - P(A)$
- **Probabilidad del Vacío:** $P(\emptyset) = 0$
- **Monotonía:** $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- **Probabilidad de la resta:** $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- **Principio de inclusión - exclusión:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad Condicional:

Si A y B son eventos de un mismo espacio muestral. Entonces la **probabilidad condicional** de **A** dado **B** se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ cuando } P(B) > 0$$

Independencia:

Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



Auxiliar #2

Ley Probabilidades Totales, Regla de Bayes e Independencia Condicional

Resumen

- **Probabilidades Totales:** Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición de Ω , para un evento $B \in \Omega$ se tiene;
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$
- **Teorema de Bayes:** $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$
- **Independencia Condicional:** A y B son condicionalmente independientes dado un evento C (con $\mathbb{P}(C) > 0$) si: $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C)$
Recordar que si A y B son condicionalmente independientes dado C , no necesariamente son independientes por si solos, tampoco al revés.



Auxiliar #3

Conteo

Resumen

- **Definición clásica de Probabilidad:** Si en un experimento, todos los posibles resultados (elementos de Ω) son igualmente probables; entonces, la probabilidad de un evento $A \subset \Omega$ es la cardinalidad de A dividido por la cardinalidad de Ω (“Casos favorables divididos en casos totales posibles”):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- **Principio de Multiplicación:** Si realizamos r experimentos tales que el k -ésimo experimento tiene n_k posibles resultados; entonces, el número de posibles resultados para la secuencia (ordenada) de r experimentos es:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_r$$

- **Muestreo Aleatorio:** Seleccionar elementos de un conjunto de tal manera que cada elemento pueda ser escogido con la misma probabilidad.

– Muestreo ordenado con reemplazo $n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$

– Muestreo ordenado sin reemplazo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

– Muestreo no-ordenado sin reemplazo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

– “Muestreo” (conteo) no-ordenado con reemplazo $\binom{n+k-1}{k}$

- **Teorema:** El numero de soluciones tales que $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ y $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ es:

$$\binom{n+k-1}{k}$$



Auxiliar #4

Variable Aleatoria Discreta

Resumen

- **Variable Aleatoria:** Una v.a X es una función definida sobre un espacio muestral donde la imagen son los números reales

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- **Rango de una Variable Aleatoria:** El rango de una v.a. X se denota como $\text{Range}(X)$ o R_X , este indica el set de posibles valores que puede tomar la v.a. X

- **Variable Aleatoria Discreta:** Es una v.a. que tiene un rango finito o numerable

- **Función de Masa de Probabilidad:** Sea X una v.a. discreta con rango R_X entonces la PMF de X se define como la función

$$p_X(x) = P(X = x)$$

para todo $x \in R_X$

- **Función de Distribución Acumulada:** Sea X una v.a. discreta con rango R_X entonces la CDF de X se define como la función

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$



Auxiliar #5

Variable Aleatoria Discreta (Again :D)

Resumen

- Esperanza: La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria X , se denota $\mathbb{E}[X]$ o μ_x y es un promedio ponderado de los valores que pueden tomar x , y los ponderadores son las probabilidades respectivas asociadas a cada valor

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

- Esperanza de una función de una variable aleatoria:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) \cdot p_X(x)$$

- Linealidad de la esperanza: Si $g(x) = a + bX$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

- Esperanza de suma de variables aleatorias: Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ con esperanza finita. Entonces

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots E[X_n]$$

- Varianza de una VA:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}[X]$$

- Desviación Estándar de una VA:

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Coeficiente de Variación:

$$CV(X) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E[X]}$$

- Distribuciones conocidas:

– Bernoulli: Sea $X \in \{0, 1\}$, $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$, $E[X] = p$ y $\text{Var}(X) = p(1-p)$

– Binomial: Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E[X] = np$, $\text{Var}[X] = np(1-p)$

- Hipergeométrica: $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n)$ con $N, K, n \in \mathbb{Z}_+$, $K, n \leq N$, $R_x = \{\max\{0, n + K - N\}, \dots, \min\{K, N\}\}$, con PMF

$$P_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{con } E[X] = n \frac{K}{N} \text{ y } \text{Var}[X] = n \frac{K}{N} \frac{(N-K)}{N} \frac{N-n}{N-1}$$



Auxiliar #6

V.A. Discreta y Control 1

Resumen

Distribuciones conocidas:

- Geométrica: $X \sim \text{Geométrica}(p)$ con $p \in (0,1)$, si $R_x = \{1, 2, 3, \dots\}$ y su PMF es:

$$p_X(x) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^{x-1} & \text{si } x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \frac{1}{p} \text{ y } \text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

- Binomial Negativa: $X \sim \text{Binomial Negativa}(m,p)$ con $p \in (0,1)$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si $R_X = \{m, m+1, m+2, \dots\}$ y su PMF es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{m-1} \cdot p^m \cdot (1-p)^{x-m} & \text{si } x = m, m+1, m+2, \dots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \frac{m}{p} \text{ y } \text{Var}[X] = \frac{m \cdot (1-p)}{p^2}$$

- Poisson: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda > 0$, si $R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y su PMF es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} & \text{si } x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \lambda \text{ y } \text{Var}[X] = \lambda$$



Auxiliar #7

Variable Aleatoria Continua

Resumen

- **PDF (Probability Density Function):** Es la función de densidad de una VA continua, se denota como $f_X(x)$.
- **CDF (Cumulative Distribution Function):** Es la probabilidad de que la VA X tome un valor menor o igual a x , se denota como $F_X(x)$ o $P(X \leq x)$
- Una VA X es **continua** si su CDF $F_X(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$
- Además, se cumple que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx$$

y

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

en todos los x donde la CDF es diferenciable

- **Rango:** El rango para una VA continua se define como $R_X = \{x | f_X(x) > 0\}$
- **Esperanza:**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

- **Varianza:**

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 f_X(x)dx$$

- **Esperanza de una función de V.A. continua:** Sea X una variable aleatoria continua con densidad f_X ; entonces, podemos calcular la esperanza la variable aleatoria $Y = g(X)$ como:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

- **Teorema de Cambio de Variable (TCV):** Si X es una VA continua y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente monótona y derivable; entonces $Y = g(X)$ tiene densidad:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

O, alternatively, remembering that the derivative of an inverse function, when it is derivable, is of the form $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$; then:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

- Distribuciones conocidas:

- Uniforme: Sea $X \sim U[a, b]$ con $a < b$, con PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \frac{b+a}{2} \text{ y } \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Exponencial: Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ con $\lambda > 0$, con PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ y } \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **PDF de una distribución Normal:** Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

- **PDF de una distribución Gamma:** Sea $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, entonces su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ con } x > 0$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$. Con $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$ y $\text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Cuando $\alpha = 1$, recuperamos la exponencial



Auxiliar #8

Distribución Multivariada

Resumen

- **Función de distribución acumulada conjunta:** Sean X e Y dos v.a., entonces la CDF conjunta de las dos v.a. se define como

$$F_{XY} = P(X \leq x, Y \leq y) \quad ; \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

- **Función de distribución acumulada marginal:** Sean X e Y dos v.a. con CDF conjunta F_{XY} , entonces la función de distribución acumulada marginal de X es

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{XY}(x, y)$$

- **Independencia:** Dos variables aleatorias X, Y son independientes si:

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y); \forall (x, y) \in R_X \times R_Y$$

- **Función de masa de probabilidad conjunta:** Sean X, Y variables aleatorias discretas con rangos R_X, R_Y , la PMF conjunta de las variables X, Y se define como:

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad ; \forall (x, y) \in R_{XY}$$

- **Función de masa de probabilidad marginal:** Sean X e Y dos v.a. discretas con PMF conjunta $p_{XY}(x, y)$, la función de masa de probabilidad marginal de X es

$$p_X(x) = \sum_{y \in R_Y} p_{XY}(x, y)$$

- **Función de masa de probabilidad condicional (sobre un evento):** Sea X una variable aleatoria discreta y A un evento tal que $P(A) > 0$. La PMF de X dado A se define como:

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(X = x, A)}{P(A)}$$

- **Función de masa de probabilidad condicional (sobre otra variable):** Sean X, Y variables aleatorias discretas. La PMF condicional de X dado $Y=y$ se define como:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Y si son independientes, entonces:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$



Auxiliar #9

Distribución Multivariada II

Resumen

- **Variables conjuntamente continuas y PDF:** Dos VA X e Y son conjuntamente continuas si existe una función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$P((X, Y) \in A) = \int \int_A f_{XY}(x, y) dx dy$$

Esta se denomina **función de densidad de probabilidad conjunta** (PDF conjunta). Se cumple que:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

F_{XY} es la CDF conjunta y es diferenciable.

- **Función de densidad de probabilidad marginal (PDF Marginal):**

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

- **Función de densidad de probabilidad condicional (sobre un evento):** Sea X una variable aleatoria continua y A un evento tal que $P(A) > 0$. La PDF de X dado A se define como:

$$f_{X|A}(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(X = X \leq x | X \in A) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X \in A)} & \text{si } x \in A \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Función de densidad de probabilidad condicional (sobre otra variable):** Sean X, Y variables aleatorias continuas. La PDF de X dado Y se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} \quad ; \forall x \in R_X, y \in R_Y$$

- **Independencia:** Dos v.a X, Y conjuntamente continuas son independientes ssi:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Y si son independientes, entonces:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- **Esperanza de Función Multivariada:**

- Si tenemos una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y n V.A. **continuas** $X_1, \dots, X_n$ con función densidad conjunta $f_{X_1, \dots, X_n}$, se define la esperanza de esta función de V.A. como:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(X_1, \dots, X_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

- Si tenemos una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y n V.A. **discretas** $X_1, \dots, X_n$ con función de masa de probabilidad conjunta $p_{X_1, \dots, X_n}$, se define la esperanza de esta función de V.A. como:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{R_{X_1, \dots, X_n}} g(X_1, \dots, X_n) p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

- **Independencia:** Si X, Y son v.a independientes entonces: $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- **Covarianza:** Sean X e Y v.a, se define su covarianza como:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

- **Correlación:** Sean X e Y v.a, se define su correlación como:

$$\rho_{X,Y} = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Notar que $\rho_{X,Y} \in [0, 1]$

- **Varianza de suma de V.A.:** Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a., entonces la varianza de la variable $X = \sum_i X_i$ es igual a:

$$Var\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^N Var(X_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} 2 \cdot Cov(X_i, X_j)$$

- **Función de V.A.:** Sean $X_1, \dots, X_N$ v.a. continuas. Dada una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable e invertible. La función densidad conjunta del vector $(Y_1, \dots, Y_n) = g(X_1, \dots, X_n)$ viene dada por (donde $Y_1, \dots, Y_N$ son continuas):

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{X_1, \dots, X_n}(g^{-1}(y_1, \dots, y_n)) \frac{1}{\det(J_g)}$$

Recordando la forma del Jacobiano:

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$



Auxiliar #10

Distribución Multivariada III y Función Generadora de Momentos

Resumen

- **Distribución Multinomial:** Las variables $X_1, X_2, \dots, X_k$ siguen una distribución *Multinomial*($N, q_1, q_2, \dots, q_k$) si $\sum_{i=1}^k q_i = 1$ y su PMF conjunta esta dada por:

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_k} = \binom{N}{x_1, x_2, \dots, x_k} q_1^{x_1} q_2^{x_2} \dots q_k^{x_k}$$

para $x_1, \dots, x_k$ tales que $\sum_{i=1}^k x_i = N$

- **Normal Multivariada:** Si $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ es un vector de v.a. independientes, todas Normal(0,1) y $\mu \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$, entonces decimos que el vector $X = (X_1, \dots, X_m) = AZ + \mu$ es una Normal Multivariada de parametros $\mu, \Sigma = AA^T$. Esto lo denotamos como $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$
 $X = (X_1, \dots, X_k) \sim \text{Normal}(\mu, \Sigma)$ si y solo si tiene PDF conjunta dada por:

$$f_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right)$$

- **N-ésimo momento de una v.a. X:**

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{R_X} x^n \cdot f_X(x) dx$$

- **N-ésimo momento central de una v.a. X:**

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n] = \int_{R_X} (x - \mathbb{E}[X])^n \cdot f_X(x) dx$$

- **Función generadora de momentos de una v.a. X:**

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$$

- **Teorema importante:** Sean X, Y dos variables aleatorias tales que $\exists c > 0$, tal que las FGM de ambas v.a. coinciden para todo valor $s \in [-c, c]$ ($M_X(s) = M_Y(s)$), entonces:

$$F_X(t) = F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Propiedad I:** Si X es una v.a. tal que existe su FGM para un $c > 0$, entonces:

$$M_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^k] \frac{s^k}{k!}$$

- **Propiedad II:** Sea X variable aleatoria y existe su FGM, se tiene entonces para todo $s \in (-c, c)$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{\partial^n M_X(s)}{\partial s^n} \right|_{s=0}$$

- **Propiedad III:** Si $X_1, \dots, X_N$ son v.a. independientes, entonces:

$$M_{X_1+\dots+X_N}(s) = M_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot M_{X_N}(s)$$

- **Función generadora de momentos de un vector aleatorio:** Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ un vector aleatorio, su FGM está dada por:

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{s^T X}] \text{ donde } s \in \mathbb{R}^N$$

- **Función característica de una v.a. X :**

$$\phi(s) = \mathbb{E}[e^{i\omega X}]$$

- **Propiedad:** Si $X_1, \dots, X_N$ son v.a. independientes, entonces:

$$\phi_{X_1+\dots+X_N}(\omega) = \phi_{X_1}(\omega) \cdot \dots \cdot \phi_{X_N}(\omega)$$

Distribution	$M(s)$	$\phi(\omega)$
Binomial(n, p)	$(pe^s + 1 - p)^n$	$(pe^{i\omega} + 1 - p)^n$
Poisson(λ)	$e^{\lambda(e^s - 1)}$	$e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$
Geométrica(p)	$\frac{pe^s}{1 - (1 - p)e^s}$	$\frac{pe^{i\omega}}{1 - (1 - p)e^{i\omega}}$
BinomialNegativa(n, p)	$\left(\frac{pe^s}{1 - (1 - p)e^s} \right)^n$	$\left(\frac{pe^{i\omega}}{1 - (1 - p)e^{i\omega}} \right)^n$
Uniform(a, b)	$\frac{e^{bs} - e^{as}}{s(b - a)}$	$\frac{e^{ib\omega} - e^{ia\omega}}{i\omega(b - a)}$
Exponential(λ)	$\frac{\lambda}{\lambda - s}, s < \lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda - i\omega}$
Normal(μ, σ^2)	$e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$	$e^{i\mu\omega - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$



Auxiliar #11

Suma de v.a., esperanza y varianza condicional

Resumen

- **Convolución Discreta:**

Si X_1 y X_2 son dos VA discretas **independientes**, la PMF de $Y = X_1 + X_2$ está dada por:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{x_2 \in R_{X_2}} p_{X_1}(y - x_2) \cdot p_{X_2}(x_2) \\ &= \sum_{x_1 \in R_{X_1}} p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(y - x_1) \end{aligned}$$

- **Convolución Continua:**

Si X_1 y X_2 son dos VA continuas **independientes**, la PDF de $Y = X_1 + X_2$ está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1 \end{aligned}$$

Y se denota como:

$$f_Y(y) = (f_{X_1} * f_{X_2})(y)$$

- **Sumas de VA independientes:**

- $\text{Poisson}(\lambda_1) + \text{Poisson}(\lambda_2) = \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $\text{Binomial}(n, p) + \text{Binomial}(m, p) = \text{Binomial}(n + m, p)$
- $\text{Gamma}(s, \lambda) + \text{Gamma}(t, \lambda) = \text{Gamma}(s + t, \lambda)$
- $\text{Exponencial}(\lambda) + \text{Exponencial}(\lambda) = \text{Gamma}(2, \lambda)$
- $\text{Normal}(\mu_1, \sigma_1^2) + \text{Normal}(\mu_2, \sigma_2^2) = \text{Normal}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

- **Probabilidad condicional:**

- **Caso continuo:** Sea X e Y dos v.a's conjuntamente discretas, la función de densidad de X condicional a Y :

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

- **Caso discreto:** Sea X e Y dos v.a's conjuntamente discretas, la PMF de X condicional a Y :

$$p_{X|Y}(x | y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

- **Esperanza condicional:**

- **Caso continuo:**

$$E[X | Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x | y) dx$$

- **Caso discreto:**

$$E[X | Y = y] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x | y)$$

- **Propiedad I:** Sean X e Y v.a. independientes, entonces

$$E[X|Y] = E[X]$$

- **Propiedad II:** Sean X e Y v.a. independientes, y sea una función $g(X)$, entonces

$$E[g(X)|Y] = E[g(X)]$$

- **Ley de Esperanza Total:**

$$\begin{aligned} E[X] &= E_Y[E_X[X | Y]] \\ E[X] &= \sum_{y \in R_Y} E[X|Y = y] \cdot p_Y(y) \\ E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y = y] \cdot f_Y(y) dy \end{aligned}$$

- **Varianza Condicional:**

$$\text{Var}[X | Y = y] = E[(X - E[X | Y = y])^2 | Y = y] = E[X^2 | Y = y] - E[X | Y = y]^2$$

- **Ley de Varianza Total:**

$$\text{Var}(X) = E_Y[\text{Var}_X(X | Y)] + \text{Var}_Y(E_X[X | Y])$$

- **Condicionando sobre un evento:**

1. **Esperanza:** Sea la v.a. X , y el evento A tal que $P(A) > 0$, entonces la **esperanza condicional** de la v.a. X con respecto al evento A es:

$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|A}(x) dx$$

Sea además la función $g(X)$, entonces:

$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_{X|A}(x) dx$$

2. **Varianza:** Sea la v.a. X , y el evento A tal que $P(A) > 0$, entonces la **varianza condicional** de la v.a. X con respecto al evento A es:

$$\text{Var}[X|A] = E[X^2|A] - E[X|A]^2$$



Auxiliar #12

Desigualdades y Convergencia

Resumen

- **Desigualdad de Markov:** Sea X una v.a. que toma valores no negativos. Para todo real $a > 0$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

- **Desigualdad de Chebyshev:** Sea X una v.a. con esperanza μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Para cualquier valor $k > 0$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

- **Cota de la Unión (desigualdad de Boole):** Para cualquier secuencia de eventos $A_1, \dots, A_n$ se cumple que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- **Desigualdad de Jensen:** Sea X una v.a. y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función:

- Si f es convexa, entonces $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.
- Si f es cóncava, entonces $f(E[X]) \geq E[f(X)]$

- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** Para todo par de v.a. X, Y se cumple que:

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

- **Convergencia en distribución**

La secuencia de VA X_n , donde $n \in \mathbb{N}$, **converge en distribución** a la VA X , i.e. $X_n \xrightarrow{d} X$, si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $F_X(x)$ es continua.

- **Teorema:** Sea la secuencia de v.a. discretas X_n no negativas definidas en los enteros, i.e,

$$R_X \subset \{0, 1, 2, \dots\}, R_{X_n} \subset \{0, 1, 2, \dots\}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces $X_n \xrightarrow{d} X$, si y solo si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

- **Convergencia en probabilidad**

La secuencia de VA X_n , donde $n \in \mathbb{N}$, **converge en probabilidad** a la VA X , i.e. $X_n \xrightarrow{p} X$, si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

- **Teorema de Convergencia en Probabilidad y Distribución:**

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{p} X, \text{ entonces } X_n \xrightarrow{d} X.$$

- **Convergencia casi segura**

La secuencia de VA X_n , donde $n \in \mathbb{N}$, definida sobre el mismo espacio muestral Ω y función de probabilidad P , **converge casi seguramente** a la VA X (definida sobre el mismo espacio muestral Ω y función de probabilidad P), i.e. $X_n \xrightarrow{C.S.} X$, si:

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

También se puede denotar como:

$$P(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = X) = 1$$

- **Teorema de Convergencia Casi Segura y en Probabilidad:**

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{C.S.} X, \text{ entonces } X_n \xrightarrow{p} X$$

- **Teorema de Convergencias:**

Sea h una función continua, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } X_n &\xrightarrow{d} X, \text{ entonces } h(X_n) \xrightarrow{d} h(X) \\ \text{Si } X_n &\xrightarrow{p} X, \text{ entonces } h(X_n) \xrightarrow{p} h(X) \\ \text{Si } X_n &\xrightarrow{C.S.} X, \text{ entonces } h(X_n) \xrightarrow{C.S.} h(X) \end{aligned}$$

- **Promedio de v.a. iid:** Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. iid con esperanza y varianza finita, i.e., $E[X_i] = \mu < \infty$ y $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$$\text{Sea } \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \text{ entonces } E[\bar{X}] = \mu, Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

- **Ley Débil de los Grandes Números**

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ VAs i.i.d con $E[X_i] = \mu < \infty$, entonces $\forall \epsilon > 0$, $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$ o equivalentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

- **Ley Fuerte de los Grandes Números**

Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ VAs i.i.d con $E[X_i] = \mu < \infty$, entonces, $\bar{X} \xrightarrow{C.S.} \mu$, o equivalentemente:

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X}(\omega) = \mu \right\} \right) = 1$$

- **Teorema Central del Límite**

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ VA i.i.d. con esperanza y varianza finita, i.e. $E[X_i] = \mu < \infty$ y $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$, entonces:

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \dots + X_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

Converge en distribución a una distribución Normal estándar cuando $n \rightarrow +\infty$, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$