Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves
Aux's: Leonardo Meneses - Giovanna Gattini

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar #11

Suma de v.a., esperanza y varianza condicional

Resumen

- **Convolución Discreta:**

  Si X_1 y X_2 son dos VA discretas **independientes**, la PMF de $Y = X_1 + X_2$ está dada por:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{x_2 \in R_{X_2}} p_{X_1}(y - x_2) \cdot p_{X_2}(x_2) \\ &= \sum_{x_1 \in R_{X_1}} p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(y - x_1) \end{aligned}$$

- **Convolución Continua:**

  Si X_1 y X_2 son dos VA continuas **independientes**, la PDF de $Y = X_1 + X_2$ está dada por:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(y - x_1) dx_1 \end{aligned}$$

  Y se denota como:

$$f_Y(y) = (f_{X_1} * f_{X_2})(y)$$

- **Sumas de VA independientes:**
  - Poisson(λ_1)+Poisson(λ_2) = Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$)
  - Binomial(n, p) + Binomial(m, p) = Binomial($n + m, p$)
  - Gamma(s, λ) + Gamma(t, λ) = Gamma($s + t, \lambda$)
  - Exponencial(λ) + Exponencial(λ) = Gamma($2, \lambda$)
  - Normal(μ_1, σ_1^2) + Normal(μ_2, σ_2^2) = Normal($\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2$)

- **Probabilidad condicional:**
  - **Caso continuo:** Sea X e Y dos v.a's conjuntamente discretas, la función de densidad de X condicional a Y:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

  - **Caso discreto:** Sea X e Y dos v.a's conjuntamente discretas, la PMF de X condicional a Y:

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)}$$

- **Esperanza condicional:**
  - **Caso continuo:**
$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x \mid y)dx$$
  - **Caso discreto:**
$$E[X \mid Y = y] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_{X|Y}(x \mid y)$$
  - **Propiedad I:** Sean X e Y v.a. independientes, entonces
$$E[X|Y] = E[X]$$
  - **Propiedad II:** Sean X e Y v.a. independientes, y sea una función $g(X)$, entonces
$$E[g(X)|Y] = E[g(X)]$$
- **Ley de Esperanza Total:**
$$E[X] = E_Y[E_X[X \mid Y]]$$
$$E[X] = \sum_{y \in R_Y} E[X|Y = y] \cdot p_Y(y)$$
$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y = y] \cdot f_Y(y)dy$$
- **Varianza Condicional:**
$$\text{Var}[X \mid Y = y] = E\left[(X - E[X \mid Y = y])^2 \mid Y = y\right] \quad = E\left[X^2 \mid Y = y\right] - E[X \mid Y = y]^2$$
- **Ley de Varianza Total:**
$$\text{Var}(X) = E_Y[\text{Var}_\text{X}(X \mid Y)] + \text{Var}_\text{Y}(E_X[X \mid Y])$$
- **Condicionando sobre un evento:**
  1. **Esperanza**: Sea la v.a. X, y el evento A tal que $P(A) > 0$, entonces la **esperanza condicional** de la v.a. X con respecto al evento A es:
$$E[X|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|A}(x)dx$$
     Sea además la función $g(X)$, entonces:
$$E[g(X)|A] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_{X|A}(x)dx$$
  2. **Varianza**: Sea la v.a. X, y el evento A tal que $P(A) > 0$, entonces la **varianza condicional** de la v.a. X con respecto al evento A es:
$$Var[X|A] = E[X^2|A] - E[X|A]^2$$

Pregunta 1

Usted acaba de ser contratado en un centro de datos de una empresa muy importante, su tarea es ver cuanto tarda el sistema en llegar al máximo de su capacidad, según lo que le cuenta su jefe, para que esto ocurra los dos servidores que distribuyen deben llegar a su límite. El tiempo que toma que esto suceda distribuye $exp(\lambda)$ para cada uno de los servidores.

a) Calcule la FGM para el sistema completo

b) Calcule la distribución que sigue el sistema completo

c) ¿Cuál es el tiempo esperado en que los servidores llegan a su capacidad máxima?

Pregunta 2

Sean (X, Y) un vector aleatorio con rangos $R_X, R_Y = \{1, \ldots, N\}$ y con función de probabilidad conjunta

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{N(N+1)} & \text{, si } x \leq y \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre la forma de las v.a. $\mathbb{E}(X \mid Y)$ y también de $\mathbb{E}(Y \mid X)$ en función de X e Y. Además, calcule la esperanza de esta última ($\mathbb{E}(Y \mid X)$).

Pregunta 3

Jaduín tiene un emprendimiento de visitas turísiticas en el Parque Nacional de Conguillio. En el sur de Chile es muy común que llueva, esto ocurre cada día con probabilidad p independiente entre días. Si un día llueve Jaduín no realiza ningún tour y descansa ese día. Sea Y el número de días que Jaduín trabaja entre días de lluvia. Sea X el total de turistas que visitan el parque en este período de Y días. Condicional a los Y días, la distribución de X es:

$$(X \mid Y) \sim \text{Poisson}(\mu Y)$$

(a) Identifique la distribución de Y ¿A qué corresponden $\mathbb{E}(Y)$ y $\text{Var}(Y)$?

(b) Encuentre $E(X)$ y $Var(X)$