

$$\rightarrow \begin{aligned} X_i &= Y_{i,1} + Y_{i,2} + \dots + Y_{i,m} \\ X_j &= Y_{j,1} + Y_{j,2} + \dots + Y_{j,m} \end{aligned}$$

$$Y_{i,1} \cdot Y_{j,1} = 0 \Leftrightarrow Y_{i,k} \cdot Y_{j,k} = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow E[X_i X_j] &= E[(Y_{i,1} + \dots + Y_{i,m})(Y_{j,1} + \dots + Y_{j,m})] \\ &= E[Y_{i,1} \cdot Y_j + \dots + Y_{i,m} \cdot Y_j] / \text{ind.} \end{aligned}$$

$$Y_{i,1} \cdot Y_{j,2} \Leftrightarrow Y_{i,1} \cdot Y_{j,2}$$

$$= E[(m-1) Y_{i,1} Y_{j,2} + \dots + (m-1) Y_{i,m} \cdot Y_{j,2}]$$

$$= E[(m-1) \cdot m \cdot Y_{i,1} Y_{j,2}]$$

$$= (m-1) m E[Y_{i,1} \cdot Y_{j,2}]$$

$$= (m-1) m E[Y_{i,1}] E[Y_{j,2}]$$

$$= (m-1) m \cdot p_i \cdot p_j$$

P2

Pregunta 2

Imagine que trabaja en un lavado de autos, y empieza a contar cuantos autos llegan en una hora. Después de una semana de conteo, determina que si X es la cantidad de autos que llegan en una hora, esta tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$, es decir $X \sim \text{Poisson}(4)$, encuentre su FGM y utilizando esta determine su media y varianza.

$$X \sim \text{Poisson}(4)$$

$$\begin{aligned} &\bullet \text{ FGM} \\ &\rightarrow e^{4(e^s - 1)} \end{aligned}$$

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} \cdot \frac{4^k e^{-4}}{k!}$$

$$= e^{-4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^s \cdot 4)^k}{k!} \quad \text{exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= e^{-4} \cdot e^{4e^s} = e^{4(e^s - 1)}$$

$$E[X] = \left. \frac{\partial M_X(s)}{\partial s} \right|_{s=0} = e^{4(e^s - 1)} \cdot 4e^s \big|_{s=0}$$

$$= e^0 \cdot 4 \cdot e^0 = 4$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\bullet E[X^2] = \frac{\partial^2 M_X(s)}{\partial s^2} = (e^{4(e^s - 1) + s} \cdot 4)^2$$

$$= 4 [e^{4(e^s - 1) + s} \cdot (4 \cdot e^s + 1)] \big|_{s=0}$$

$$= 4 [e^0 \cdot (4 \cdot e^0 + 1)] = 4 [1 \cdot (5)] = 20$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = 20 - 4^2 = 4 //$$

P3

Pregunta 3

Una empresa aseguradora tiene negocios en Santiago, Valparaíso y Concepción. Las pérdidas en cada ciudad son independientes. Para poder entender la distribución de su pérdida encomiendan un estudio estadístico en el que definen las FGM de cada ciudad, de la siguiente forma:

$$M_{Santiago}(t) = (1 - 2t)^{-3}, \quad M_{Valparaiso}(t) = (1 - 2t)^{-2.5}, \quad M_{Concepcion} = (1 - 2t)^{-4.5}$$

Si X es la pérdida combinada de las tres ciudades. Calcule:

- $E[X]$
- $Var(X)$
- $E[X^3]$

$$X = S + V + C$$

$$M_X = M_{S+V+C} = M_S \cdot M_V \cdot M_C = (1 - 2t)^{-10}$$

$$E[X] = \frac{\partial M_X}{\partial t} = (-10)(1 - 2t)^{-11}(-2) \Big|_{t=0}$$

$$= 20$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\bullet E[X^2] = \frac{\partial^2 M_X}{\partial t^2} = (-10)(-11)(1 - 2t)^{-12}(-2)(-2) \Big|_{t=0}$$

$$= 440$$

$$\rightarrow Var(X) = 440 - 400 = 40$$

$$E[X^3] = \frac{\partial^3 M_X}{\partial t^3} = (-10)(-11)(-12)(1 - 2t)^{-13}(-2)(-2)(-2) \Big|_{t=0}$$

$$= 10\,560$$