Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves
Aux's: Leonardo Meneses - Giovanna Gattini

Auxiliar #10

Distribución Multivariada III y Función Generadora de Momentos

Resumen

- **Distribución Multinomial:** Las variables $X_1, X_2, ..., X_k$ siguen una distribución $Multinomial(N, q_1, q_2, ..., q_k)$ si $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$ y su PMF conjunta esta dada por:

$$p_{X_1,X_2,...,X_k} = \binom{N}{x_1, x_2, ..., x_k} q_1^{x_1} q_2^{x_2} ... q_k^{x_k}$$

para $x_1, ..., x_k$ tales que $\sum_{i=1}^{k} x_i = N$

- **Normal Multivariada**: Si Z $= (Z_1, Z_2, ..., Z_k)$ es un vector de v.a. independientes, todas Normal(0,1) y $\mu \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{mxk}$, entonces decimos que el vector X $= (X_1, ..., X_m) = AZ + \mu$ es una Normal Multivariada de parametros $\mu, \Sigma = AA^T$. Esto lo denotamos como $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

  X $= (X_1, ..., X_k) \sim Normal(\mu, \Sigma)$ si y solo si tiene PDF conjunta dada por:

$$f_X(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} \cdot exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

- **N-ésimo momento de una v.a. X:**

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{R_X} x^n \cdot f_X(x) dx$$

- **N-ésimo momento central de una v.a. X:**

$$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n] = \int_{R_X} (x - \mathbb{E}[X])^n \cdot f_X(x) dx$$

- **Función generadora de momentos de una v.a. X:**

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}]$$

- **Teorema importante:** Sean X, Y dos variables aleatorias tales que $\exists c > 0$, tal que las FGM de ambas v.a. coinciden para todo valor $s \in [-c, c]$ $(M_X(s) = M_Y(s))$, entonces:

$$F_X(t) = F_Y(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

- **Propiedad I:** Si X es una v.a. tal que existe su FGM para un $c > 0$, entonces:

$$M_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^k] \frac{s^k}{k!}$$

- **Propiedad II:** Sea X variable aleatoria y existe su FGM, se tiene entonces para todo $s \in (-c, c)$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \left.\frac{\partial^n M_X(s)}{\partial s^n}\right|_{s=0}$$

- **Propiedad III:** Si $X_1, ..., X_N$ son v.a. independientes, entonces:

$$M_{X_1+...+X_N}(s) = M_{X_1}(s) \cdot ... \cdot M_{X_N}(s)$$

- **Función generadora de momentos de un vector aleatorio:** Sea $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ un vector aleatorio, su FGM está dada por:

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{s^T X}] \text{ donde s} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

- **Función característica de una v.a. X:**

$$\phi(s) = \mathbb{E}[e^{i\omega X}]$$

- **Propiedad:** Si $X_1, ..., X_N$ son v.a. independientes, entonces:

$$\phi_{X_1+...+X_N}(\omega) = \phi_{X_1}(\omega) \cdot ... \cdot \phi_{X_N}(\omega)$$

Distribution	$M(s)$	$\phi(\omega)$
Binomial(n,p)	$(pe^s + 1 - p)^n$	$\left(pe^{i\omega} + 1 - p\right)^n$
Poisson(λ)	$e^{\lambda(e^s - 1)}$	$e^{\lambda(e^{i\omega} - 1)}$
Geométrica(p)	$\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}$	$\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}}$
BinomialNegativa(n,p)	$\left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^n$	$\left(\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}}\right)^n$
Uniform$[a,b]$	$\frac{e^{bs} - e^{as}}{s(b-a)}$	$\frac{e^{ib\omega} - e^{ia\omega}}{i\omega(b-a)}$
Exponential(λ)	$\frac{\lambda}{\lambda - s}, \lvert s \rvert < \lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda - i\omega}$
Normal(μ, σ^2)	$e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$	$e^{i\mu\omega - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

Pregunta 1

Un dado con r caras, numerado desde el 1 al r es lanzado n veces. La probabilidad de que salga la i-esima cara es igual a p_i, y los resultados de los distintos lanzamientos son independientes. Sea X_i el numero de veces que la i-esima cara aparece.

- Calcule la PMF conjunta de $p_{x_1,...,x_r}(k_1,...,k_r)$
- Encuentre el valor esperado y la varianza de X_i
- Encuentre $\mathbb{E}[X_i X_j]$ para los $i \neq j$

Pregunta 2

Imagine que trabaja en un lavado de autos, y empieza a contar cuantos autos llegan en una hora. Después de una semana de conteo, determina que si X es la cantidad de autos que llegan en una hora, esta tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 4$, es decir $X \sim Poisson(4)$, encuentre su FGM y utilizando esta determine su media y varianza.

Pregunta 3

Una empresa aseguradora tiene negocios en Santiago, Valparaíso y Concepción. Las perdidas en cada ciudad son independientes. Para poder entender la distribución de su perdida encomiendan un estudio estadístico en el que definen las FGM de cada ciudad, de la siguiente forma:

$$M_{Santiago}(t) = (1-2t)^{-3}, \quad M_{Valparaiso}(t) = (1-2t)^{-2.5}, \quad M_{Concepcion} = (1-2t)^{-4.5}$$

Si X es la perdida combinada de las tres ciudades. Calcule:

- $E[X]$
- $Var(X)$
- $E[X^3]$