Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves
Aux's: Leonardo Meneses - Giovanna Gattini

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar #9

Distribución Multivariada II

Resumen

- **Variables conjuntamente continuas y PDF**: Dos VA X e Y son conjuntamente continuas si existes una funcion $f_{XY}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ tal que para todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$P((X,Y)\in A) = \int\int_A f_{XY}(x,y)dxdy$$

Esta se denomina **función de densidad de probabilidad conjunta** (PDF conjunta). Se cumple que:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

F_{XY} es la CDF conjunta y es diferenciable.

- **Función de densidad de probabilidad marginal (PDF Marginal)**:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

- **Función de densidad de probabilidad condicional (sobre un evento):** Sea X una variable aleatoria continua y A un evento tal que $P(A) > 0$. La PDF de X dado A se define como:

$$f_{X|A}(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(X = X \leq x | X \in A) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{P(X\in A)} & si \;\; x \in A \\ 0 & \sim \end{cases}$$

- **Función de densidad de probabilidad condicional (sobre otra variable):** Sean X, Y variables aleatorias continuas. La PDF de X dado Y se define como:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_y(y)} \quad ; \forall x \in R_X, y \in R_Y$$

- **Independencia**: Dos v.a X, Y conjuntamente continuas son independientes ssi:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Y si son independientes, entonces:

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- **Esperanza de Función Multivariada:**
  - Si tenemos una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y n V.A. **continuas** $X_1, \dots, X_n$ con función densidad conjunta $f_{X1,\dots,X_n}$, se define la esperanza de esta función de V.A. como:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(X_1, \dots, X_n) f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

  - Si tenemos una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y n V.A. **discretas** $X_1, \dots, X_n$ con función de masa de probabilidad conjunta $p_{X1,\dots,X_n}$, se define la esperanza de esta función de V.A. como:

$$\mathbb{E}[g(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{R_{X_1,\dots,X_n}} g(X_1, \dots, X_n) p_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

- **Independencia:** Si X, Y son v.a independientes entonces: $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$
- **Covarianza:** Sean X e Y v.a, se define su covarianza como:

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \end{aligned}$$

- **Correlación:** Sean X e Y v.a, se define su correlación como:

$$\rho_{X,Y} = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

  Notar que $\rho_{X,Y} \in [0, 1]$
- **Varianza de suma de V.A.:** Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a., entonces la varianza de la variable $X = \sum_i X_i$ es igual a:

$$Var(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} 2 \cdot Cov(X_i, X_j)$$

- **Función de V.A.:** Sean $X_1, ..., X_N$ v.a. continuas. Dada una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable e invertible. La función densidad conjunta del vector $(Y_1, \dots, Y_n) = g(X_1, \dots, X_n)$ viene dada por (donde $Y_1, ..., Y_N$ son continuas):

$$f_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{X_1,\dots,X_n}(g^{-1}(y_1, \dots, y_n)) \frac{1}{\det(J_g)}$$

  Recordando la forma del Jacobiano:

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Pregunta 1: P1 Examen 2021-1

En una planta refinadora de Níquel, de la empresa CODELNIQ, hay una cuota fija de 6 millones de litros de agua que se puede usar al mes y usted está analizando dos etapas del proceso que consumen una gran proporción de la cuota. Llamando V a la cantidad en millones de litros que ocupa una etapa y X a la cantidad en millones de litros que ocupa la otra, usted nota a partir de los datos de meses anteriores que, aproximadamente, todas las combinaciones posibles del par (V, X) son igual de probables. Es por ello que usted decide asumir que la densidad del par (V, X) es constante en la región de posibles proporciones dada por

$$T = \{(v, x) : v \geq 0, x \geq 0, v + x \leq 6\}.$$

(a) Calcule la densidad (la PDF) conjunta del par (V, X) bajo el supuesto de que ésta es constante en la región T.

(b) Calcule las densidades marginales de V y X.

(c) Calcule la covarianza entre V y X.

(d) Usted le cuenta el problema a un amigo y le dice que todo sería mucho más fácil si V y X fueran independientes. Éste le sugiere hacer un cambio de variables y considerar el par (V, Z), donde $Z = X/(6 - V)$. Calcule la densidad conjunta de (V, Z) y muestre que V y Z son independientes.

Pregunta 2

Sea (X, Y) un vector 2-dimensional con función de densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{C}{x^2 y^2}, \quad x > 1, y \geq x$$

Encuentre C para que f_{XY} sea una densidad de probabilidad y calcule la densidad marginal $f_X(x)$ y la densidad condicional $f_{Y|X}(y|x)$

Pregunta 3

N personas se juntan a comer en una mesa redonda, con $N > 5$. No se pueden decidir quienes pagaran la cuenta, por lo que deciden dejarlo al azar con un juego. Cada persona lanza una moneda, si es que una persona tiene un resultado diferente al de sus dos vecinos, esta persona debe contribuir a pagar la cuenta. Si es que a nadie le tocará pagar la cuenta, esta corre por la casa. Sea X el número de personas que pagarán la cuenta, encuentre $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.