P1

Pregunta 1

En una población de N_1 mujeres la estatura (X_1) es una VA con densidad $f_1(x)$; en una población de N_2 hombres la estatura (X_2) es una VA con densidad $f_2(x)$. Las dos poblaciones se junta y se saca una persona al azar. Si la VA X es estatura de la persona determine $f_X(x)$ y $F_X(x)$.

N_1 mujeres. X_1 estatura con densidad $F_1(x)$
N_2 hombres. X_2 " " " $F_2(x)$

$N = N_1 + N_2$
X estatura de una persona

- $$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x \mid M)\underbrace{P(M)}_{\frac{N_1}{N_1+N_2}} + P(X \leq x \mid H)P(H)$$

prob. totales

$$= \int_0^x F_1(x) \cdot \frac{N_1}{N_1+N_2}\, dx + \int_0^x F_2(x) \cdot \frac{N_2}{N_1+N_2}\, dx$$

$$= \frac{N_1}{N_1+N_2} \cdot F_1(x) + \frac{N_2}{N_1+N_2} \cdot F_2(x)$$

- $$F_X(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{N_1}{N_1+N_2} \cdot F_1(x) + \frac{N_2}{N_1+N_2} \cdot F_2(x)$$

P2

Pregunta 2

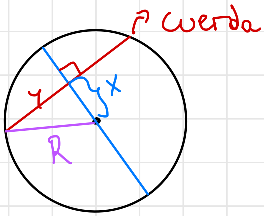
El Presidente de la Academia de Ciencias ha organizado un debate para zanjar el problema de generar al azar una cuerda en una circunferencia de radio R. Good San Martin propone dibujar un radio y escoger sobre el un punto al azar, de acuerdo con la ley Uniforme en $[0, R]$ y luego, en dicho punto, trazar una perpendicular al radio, definiendo así una cuerda. Evil San Martin propone dibujar un par de radios que formen un ángulo θ, escogido al azar, con ley uniforme en $[0, \pi]$, y construir la cuerda uniendo los extremos de los radios. Para orientar la discusión, el presidente contrata a un estudiante del IN3141 (usted, por ejemplo) cuya misión es:

a) Determinar, si es que existe, la densidad de probabilidad del largo de la cuerda en cada uno de los métodos propuestos

b) Calcular los respectivos valores esperados y varianzas.

a)

• Good



$X \sim U[0, R]$ la distancia de x al centro de la circunferencia

$Y = g(x)$ largo de la cuerda

$$\to x^2 + y^2 = R^2 \quad \to y^2 = R^2 - x^2$$
$$\to y = (R^2 - x^2)^{1/2}$$
$$\to 2y = y^* = 2(R^2 - x^2)^{1/2} = g(x)$$

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}$$

• $y = 2(R^2 - x^2)^{1/2} \to \left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2 - x^2$

$\to x^2 = R^2 - \frac{y^2}{4} \to x = \left(R^2 - \frac{y^2}{4}\right)^{1/2} = g^{-1}(y)$

• $F_X(g^{-1}(y))$. Como $X \sim U[0, R] \to F(x) = \frac{1}{R}$

$\to F_X(g^{-1}(y)) = \frac{1}{R}$ si $g^{-1}(y) \in [0, R]$

• $g'(x) = \left(2(R^2-x^2)^{1/2}\right)' = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot(R^2-x^2)^{-1/2}\cdot[0-2x]$

$$= \frac{-2x}{(R^2-x^2)^{1/2}}$$

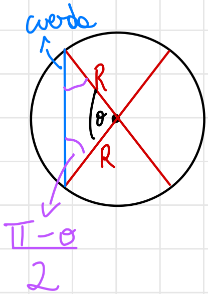
• $|g'(g^{-1}(y))| = \left|\frac{-2\cdot\left(R^2-\frac{y^2}{4}\right)^{1/2}}{\left(\cancel{R^2}-\left(\cancel{R^2}-\frac{y^2}{4}\right)\right)^{1/2}}\right| = \left|\frac{-2\left(R^2-\frac{y^2}{4}\right)^{1/2}}{\frac{y}{2}}\right|$

$$= \left|-\frac{4}{y}\cdot\left(R^2-\frac{y^2}{4}\right)^{1/2}\right|$$

→ $F_Y(y) = \frac{1}{R}\cdot\frac{y}{4}\cdot\left(\frac{4}{4R^2-y^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{R}\cdot\frac{y}{\cancel{4}\,2}\cdot\frac{\cancel{2}}{(4R^2-y^2)^{1/2}}$

$$= \frac{y}{2R}\cdot\frac{1}{(4R^2-y^2)^{1/2}} \quad //$$

• Evil



$\theta \sim U[0,\pi]$

$Y = h(\theta)$ es el largo de la cuerda

→ Por ley de senos:

$$\frac{h(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{R}{\sin(\pi/2-\theta/2)} \to h(\theta) = \frac{R\cdot\sin(\theta)}{\sin(\pi/2-\theta/2)}$$

$$\to h(\theta) = \frac{R\cdot\sin(\theta/2+\theta/2)}{\underbrace{\cancel{\sin(\pi/2)}}_{1}\cos(\theta/2)-\sin(\theta/2)\underbrace{\cancel{\cos(\pi/2)}}_{0}} = \frac{R\cdot 2\sin(\theta/2)\cancel{\cos(\theta/2)}}{\cancel{\cos(\theta/2)}}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}$$

- $h(\theta) = y = 2R \sin(\theta/2) \rightarrow \dfrac{y}{2R} = \sin(\theta/2)$

$$\rightarrow \arcsin\left(\frac{y}{2R}\right) = \frac{\theta}{2} \rightarrow 2\arcsin\left(\frac{y}{2R}\right) = \theta = h^{-1}(y)$$

- $F_\theta(h^{-1}(y))$. Como $\theta \sim U[0,\pi] \rightarrow F_\theta = \dfrac{1}{\pi}$

$\rightarrow F_\theta(h^{-1}(y)) = \dfrac{1}{\pi}$ si $h^{-1}(y) \in [0,\pi]$

- $h'(\theta) = \left(2R\sin(\theta/2)\right)' = \cancel{2}R\cos(\theta/2) \cdot \cancel{1/2} = R\cos(\theta/2)$

- $|h'(h^{-1}(y))| = \left| R\cos\left(\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \arcsin\left(\dfrac{y}{2R}\right)\right) \right|$

$\cos(\arcsin(x)) = (1-x^2)^{1/2}$

$$\rightarrow \left| R \cdot \left[1 - \frac{y^2}{4R^2}\right]^{1/2} \right|$$

$$\rightarrow F_{h(\theta)}(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{4R^2}{4R^2 - y^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\cancel{R}} \cdot \frac{2\cancel{R}}{(4R^2 - y^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(4R^2 - y^2)^{1/2}}$$

b) $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot F_x \, dx = \int_0^R 2(R^2-x^2)^{1/2} \cdot \frac{1}{R} \, dx$

$$= \frac{2}{R} \int_0^R (R^2-x^2)^{1/2} \, dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{R}} \cdot \frac{\pi R^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\,2}$$

$$= \frac{\pi R}{2}$$

$Var[g(x)] = E[g(x)^2] - E[g(x)]^2$

$$= \int_0^R 4(R^2-x^2) \cdot \frac{1}{R} \, dx - \left(\frac{\pi R}{2}\right)^2$$

$$\to \frac{4}{R} \int_0^R (R^2-x^2) \, dx - \frac{\pi^2 R^2}{4} = \frac{4}{R}\left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] - \frac{\pi^2 R^2}{4}$$

$$= \frac{4}{\cancel{R}} \cdot \frac{2R^{\cancel{3}\,2}}{3} - \frac{\pi^2 R^2}{4} = \frac{8}{3} R^2 - \frac{\pi^2 R^2}{4}$$

$E[h(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) F_\theta \, d\theta = \int_0^\pi 2R \sin(\theta/2) \cdot \frac{1}{\pi} \, d\theta$

$$= \frac{2R}{\pi} \int_0^\pi \sin(\theta/2) \, d\theta = \frac{2R}{\pi} \cdot 2 = \frac{4R}{\pi}$$

$Var[h(\theta)] = E[h(\theta)^2] - E[h(\theta)]^2$

$$= \int_0^\pi 4R^2 \sin^2(\theta/2) \cdot \frac{1}{\pi} \, d\theta - \frac{16R^2}{\pi^2}$$

$$= \frac{4R^2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(\theta/2) \, d\theta - \frac{16R^2}{\pi^2} = \frac{\cancel{4}\,2R^2}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} - \frac{16R^2}{\pi^2}$$

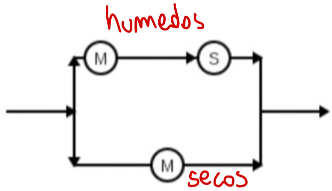
$$= 2R^2 - \frac{16R^2}{\pi^2}$$

P3 En una fábrica de procesamiento de arándanos rojos, se reciben dos tipos: los húmedos y secos. Cuando son recibidos, se separan en dos lineas de producción según su tipo. En ambas lineas pasan por una seleccionadora **M**, separándolas según calidad. La linea húmeda debe pasar por una secadora **S**, para luego juntarse con las secas y llevadas a empaquetado. Se adjunta un diagrama del proceso. Se determinó que la vida útil (en años) está dado por la variable aleatoria X con una distribución exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$. Cuando se rompen estas quedan inutilizables.

Si hubo producción durante un año:

a) ¿Cuál es la probabilidad de M_{seco} funcione por mas de un año?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo se procesen arándanos secos?



a) $X \sim \exp(\lambda)$
$X \sim \exp(1/2)$

$$\exp(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Bayes

$$P(M_s > 1 \mid \text{Hay producción}) = \overset{1}{\cancel{P(\text{Hay prod.} \mid M_s > 1)}} \cdot \frac{P(M_s > 1)}{P(\text{Hay prod.})}$$

$$P(M_s > 1) = 1 - P(M_s < 1) = 1 - F_X(1)$$

$$= 1 - \int_0^1 F_X(x)\,dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \cancel{1} + e^{-1/2} - \cancel{1}$$

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^{1/2} \Big\} \; p$$

$$\begin{aligned} P(\text{Hay prod.}) &= 1 - P(\text{No hay prod.}) \\ &= 1 - p(1-p)(1-p) - p(1-p)(1-p) - (1-p)^3 \\ &= p + p^2 - p^3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow P(M_s > 1 \mid \text{Hay prod.}) = \frac{p}{p + p^2 - p^3}$$

b) $$P(\text{solo secos} \mid \text{Hay prod.}) = \overbrace{P(\text{Hay prod.} \mid \text{solo secos})}^{1} \cdot \frac{P(\text{solo secos})}{P(\text{hay prod.})}$$

$$\rightarrow P(\text{secos}) = p(1-p)(1-p) + p(1-p)p + p \cdot p(1-p)$$
$$= \ldots = p - p^3$$

$$\rightarrow P(\text{solo secos} \mid \text{Hay prod.}) = \frac{p-p^3}{p+p^2-p^3}$$