



Auxiliar #7

Variable Aleatoria Continua

Resumen

- **PDF (Probability Density Function):** Es la función de densidad de una VA continua, se denota como $f_X(x)$.
- **CDF (Cumulative Distribution Function):** Es la probabilidad de que la VA X tome un valor menor o igual a x , se denota como $F_X(x)$ o $P(X \leq x)$
- Una VA X es **continua** si su CDF $F_X(x)$ es continua para todo $x \in \mathbb{R}$
- Además, se cumple que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

y

$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

en todos los x donde la CDF es diferenciable

- **Rango:** El rango para una VA continua se define como $R_X = \{x | f_X(x) > 0\}$
- **Esperanza:**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

- **Varianza:**

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 f_X(x) dx$$

- **Esperanza de una función de V.A. continua:** Sea X una variable aleatoria continua con densidad f_X ; entonces, podemos calcular la esperanza la variable aleatoria $Y = g(X)$ como:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

- **Teorema de Cambio de Variable (TCV):** Si X es una VA continua y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente monótona y derivable; entonces $Y = g(X)$ tiene densidad:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

O, alternatively, recordando que la derivada de una función inversa, cuando esta es derivable, es de la forma $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$; entonces:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

- Distribuciones conocidas:

- Uniforme: Sea $X \sim U[a, b]$ con $a < b$, con PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \frac{b+a}{2} \text{ y } \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Exponencial: Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ con $\lambda > 0$, con PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\text{con } E[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ y } \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **PDF de una distribución Normal:** Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

- **PDF de una distribución Gamma:** Sea $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, entonces su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \text{ con } x > 0$$

donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$. Con $E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$ y $\text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Cuando $\alpha = 1$, recuperamos la exponencial

Pregunta 1

En una población de N_1 mujeres la estatura (X_1) es una VA con densidad $f_1(x)$; en una población de N_2 hombres la estatura (X_2) es una VA con densidad $f_2(x)$. Las dos poblaciones se junta y se saca una persona al azar. Si la VA X es estatura de la persona determine $f_X(x)$ y $F_X(x)$.

Pregunta 2

El Presidente de la Academia de Ciencias ha organizado un debate para zanjar el problema de generar al azar una cuerda en una circunferencia de radio R . Good San Martin propone dibujar un radio y escoger sobre el un punto al azar, de acuerdo con la ley Uniforme en $[0, R]$ y luego, en dicho punto, trazar una perpendicular al radio, definiendo así una cuerda. Evil San Martin propone dibujar un par de radios que formen un ángulo θ , escogido al azar, con ley uniforme en $[0, \pi]$, y construir la cuerda uniendo los extremos de los radios. Para orientar la discusión, el presidente contrata a un estudiante del IN3141 (usted, por ejemplo) cuya misión es:

- Determinar, si es que existe, la densidad de probabilidad del largo de la cuerda en cada uno de los métodos propuestos
- Calcular los respectivos valores esperados y varianzas.

Pregunta 3 [Propuesto]

En una fábrica de procesamiento de arándanos rojos, se reciben dos tipos: los húmedos y secos. Cuando son recibidos, se separan en dos líneas de producción según su tipo. En ambas líneas pasan por una seleccionadora **M**, separándolas según calidad. La línea húmeda debe pasar por una secadora **S**, para luego juntarse con las secas y llevadas a empaquetado. Se adjunta un diagrama del proceso. Se determinó que la vida útil (en años) está dado por la variable aleatoria X con una distribución exponencial de parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$. Cuando se rompen estas quedan inutilizables.

Si hubo producción durante un año:

- ¿Cuál es la probabilidad de M_{seco} funcione por mas de un año?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sólo se procesen arándanos secos?

