Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves
Aux's: Leonardo Meneses - Giovanna Gattini

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar #6

V.A. Discreta y Control 1

Resumen

Distribuciones conocidas:

- Geométrica: X $\sim$ Geométrica(p) con p $\in$ (0,1), si $R_x = \{1, 2, 3, ...\}$ y su PMF es:

$$p_X(x) = \begin{cases} p \cdot (1-p)^{x-1} & \text{si } x = 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

con E[X] $= \frac{1}{p}$ y Var[X] $= \frac{1-p}{p^2}$

- Binomial Negativa: X $\sim$ Binomial Negativa(m,p) con p $\in$ (0,1) y m $\in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, si $R_X = \{m, m+1, m+2, ...\}$ y su PMF es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{m-1} \cdot p^m \cdot (1-p)^{x-m} & \text{si } x = m, m+1, m+2, ... \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

con E[X] $= \frac{m}{p}$ y Var[X] $= \frac{m \cdot (1-p)}{p^2}$

- Poisson: X $\sim$ Poisson(λ) con $\lambda > 0$, si $R_X = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ y su PMF es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} & \text{si } x = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

con E[X] $= \lambda$ y Var[X] $= \lambda$

Pregunta 1

Gato Bros es un popular juego de plataformas en que el personaje principal es un felino que debe superar n niveles para convertirse en un héroe. Este juego no tiene un límite de vidas, pero es bastante difícil, por lo que podría tomarle muchos intentos pasar cada nivel. Cada vez que usted pierde en un nivel o que usted supera un nivel, se considera como un intento. Todos estos intentos son independientes entre si. Una vez que usted supera el i-ésimo nivel pasa al nivel siguiente (el $i+1$-ésimo), cuando supera el nivel n termina el juego. Si pierde en un nivel entonces lo vuelve a intentar. En particular, para cada nivel i usted tiene una probabilidad p_i de superarlo cada vez que lo intenta.

a) Sea X_i el número de intentos para superar la etapa i. ¿Cuál es la distribución de X_i? Justifique su respuesta.

b) Sea X el número de intentos totales para superar los n niveles, calcule $\mathbb{E}[X]$.

Para las próximas preguntas asumiremos que $p_i = p \quad \forall i \in \{1, 2, 3..., n\}$.

c) Sea X el número de intentos para superar el juego completo. ¿Cuál es la distribución de X? Justifique su respuesta.

Considere que ahora recibe una recompenza de R monedas cuando supera el nivel i en menos de h intentos. Además, debe pagar un costo de c monedas en cada nivel i que juega (independiente del número de intentos que le tome superarlo).

d) Sea Y el saldo final en monedas que usted tiene al superar los n niveles. Calcule $\mathbb{E}[Y]$ y $Var(Y)$. Note que Y puede tomar valores negativos.
(Hint: Notar que el número de monedas a obtener puede escribirse como $c_1 \cdot Z - c_2$, donde c_1, c_2 son constantes, y Z una VA discreta con distribución conocida.)

Pregunta 2

1. Se tienen 2 mochilas. La primera contiene 10 dulces azules, mientras que la segunda contiene 15 dulces azules. Selecciono una de las mochilas de manera aleatoria (i.e. con igual probabilidad escojo cada mochila) e introduzco 6 dulces negros en ella. Luego, revuelvo los dulces en esta mochila y saco un dulce. Si este dulce resulta ser negro, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado la primera mochila?

2. Se tienen k mochilas con M dulces azules y N dulces negros cada una. Un dulce es seleccionado aleatoriamente desde la primera mochila y es transferido a la segunda, luego se selecciona un dulce al azar desde la segunda mochila y es transferido a la tercera mochila, y así hasta llegar a la $k-$ésima mochila. Si después de este proceso un dulce es seleccionado de manera aleatoria desde la $k-$ésima mochila, muestre que la probabilidad de que este dulce sea de color azul es la misma que la probabilidad de que el primer dulce transferido desde la primera a la segunda mochila sea azul (i.e. $p = \frac{M}{M+N}$). *Hint: Podría ser de utilidad analizar dicha probabilidad en la segunda mochila, y luego para una $j-$ésima mochila cualquiera.*

Pregunta 3

Es un viernes por la tarde y usted con sus 3 amigxs quieren entreteners con el nuevo juego online: *Super Buxef Adventures*. Este juego cuenta con 20 personajes distintivos que colaboraran juntos para resolver problemas de combinatoria. Cada persona elige un personaje (se pueden repetir).

a) ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar si no importa quién eligió cada personaje? Si la elección fuese al azar: ¿todos estos equipos son igual de probables?

b) Considere que hay 3 personajes icónicos: *El Rusio*, *La Mona* y *Gorbea* ¿Cual es la probabilidad de que se forme un equipo con al menos uno de estos personajes si la selección de personajes se realiza secuencialmente y al azar?

c) Usted y sus amigxs son tan buenxs jugando este juego que deciden organizar un torneo, en el que se inscriben 5 equipos. Como organizadores de este, ponen en las reglas que no se pueden repetir los personajes y los equipos seleccionan según su número de inscripción (ustedes eligen primero al ser los organizadores) ¿Cuántas configuraciones posibles existen si los equipos son distinguibles, pero no los jugadores?


C1
OBJECTS IN MIRROR ARE CLOSER
THAN THEY APPEAR