

Resumen

- Esperanza: La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria X , se denota $\mathbb{E}[X]$ o μ_x y es un promedio ponderado de los valores que pueden tomar x , y los ponderadores son las probabilidades respectivas asociadas a cada valor

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

- Esperanza de una función de una variable aleatoria:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) \cdot p_X(x)$$

- Linealidad de la esperanza: Si $g(x) = a + bX$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

- Esperanza de suma de variables aleatorias: Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ con esperanza finita. Entonces

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$$

- Varianza de una VA:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}[X]$$

- Desviación Estándar de una VA:

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Coeficiente de Variación:

$$CV(X) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E[X]}$$

- Distribuciones conocidas:

– Bernoulli: Sea $X \in \{0, 1\}$, $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$, $E[X] = p$ y $\text{Var}(X) = p(1-p)$

– Binomial: Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E[X] = np$, $\text{Var}[X] = np(1-p)$

– Hipergeométrica: $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n)$ con $N, K, n \in \mathbb{Z}_+$, $K, n \leq N$, $R_x = \{\max\{0, n + K - N\}, \dots, \min\{K, N\}\}$, con PMF

$$P_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

con $E[X] = n \frac{K}{N}$ y $\text{Var}[X] = n \frac{K}{N} \frac{(N-K)}{N} \frac{N-n}{N-1}$

P1

Pregunta 1

Pepe quería recordar viejos tiempos e instaló el clásico juego *Preguntados*. Este consiste en responder preguntas de 4 alternativas relacionadas a distintas temáticas. En este momento, a Pepe le queda responder 3 preguntas correctamente para ganar. Estas preguntas serán de las siguientes temáticas secuencialmente: Ciencia, Entretenimiento e Historia. Pepe sabe mucho de cultura pop, pero no es tan estudioso, por lo que su probabilidad de acertar en la pregunta de Entretenimiento es $\frac{3}{4}$ y su probabilidad de acertar en las otras categorías es $\frac{1}{4}$ (responde completamente al azar). Si Pepe se equivoca en alguna pregunta no puede contestar las que siguen (pierde inmediatamente). Considere X como el número de preguntas que Pepe responde correctamente.

- ¿Cuál es el rango de X ?
- Encuentre la PMF de X
- Calcule la Esperanza de X
- Calcule la Varianza de X

Ahora considere que si Pepe gana esta partida será premiado con 1280 monedas del juego, pero en caso de perder incurrirá en una cota de 64 monedas por participar.

- ¿Cuál es la ganancia esperada de Pepe?

a) $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

b) $P(X=x) \quad \sum_{x \in R_X} P(X=x) = 1$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(X=0) &= \frac{3}{4} = \frac{48}{64} \\ P(X=1) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} = \frac{12}{64} \\ P(X=2) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64} \\ + P(X=3) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64} \end{aligned}$$

c) $E[X] = \sum x \cdot p_X(x)$

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot \frac{48}{64} + 1 \cdot \frac{12}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} + 3 \cdot \frac{3}{64} \\ &= \frac{37}{64} \end{aligned}$$

d) $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ $g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \rightarrow E[X^2] &= E[g(x)] = 0^2 \cdot \frac{48}{64} + 1^2 \cdot \frac{12}{64} + 2^2 \cdot \frac{9}{64} + 3^2 \cdot \frac{3}{64} \\ &= \frac{67}{64} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Var}(X) = \frac{67}{64} - \left(\frac{37}{64}\right)^2 = \frac{3327}{4096}$$

e) Gane: 1280 monedas
Perde: -64 "

$$E[g(x)] \text{ con } g(x) = \begin{cases} 1280 & x=3 \\ -64 & x=0,1,2 \end{cases}$$

$$\rightarrow 1280 \cdot P(X=3) + (-64) \cdot P(X \leq 2) \quad P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) \\ 1280 \cdot \frac{3}{64} + (-64) \cdot \frac{61}{64} \quad 1 - P(X=3) \\ 60 - 61 \\ -1$$

P2

Pregunta 2

Un tirador de tiro skeet tiene 10 disparos, la probabilidad de acertar al blanco es de 0.2 (cada tiro es independiente). Sea X el numero de aciertos

- Calcule la PMF de X
- ¿Cual es la probabilidad de no acertar a ningún disco?
- ¿Cual es la probabilidad de que acierte mas veces de las que falla?
- Calcule la Esperanza y Varianza de X
- Suponga que el tirador tiene que pagar \$3 para entrar al torneo y que gana \$2 por cada tiro en el que acierta. Sea Y su ganancia, encuentre su Esperanza y Varianza.
- Ahora suponga que no tiene que pagar para entrar al torneo y que su ganancia es el numero de aciertos al cuadrado. Si Z es su ganancia, encuentre la Esperanza de Z

$$a) X \sim \text{bpm}(n, p) = \text{bpm}(10, 0.2)$$

$$\rightarrow P_X(K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} = \binom{10}{K} 0.2^K 0.8^{10-K}$$
$$K \in R_X = \{0, 1, \dots, n\} = \{0, 1, \dots, 10\}$$

$$b) P(X=0) = \binom{10}{0} 0.2^0 0.8^{10} = \frac{10!}{0!10!} 0.8^{10} = 0.107$$

$$c) P(X \geq 6) = \sum_{K=6}^{10} P(X=K) = 0.0064$$

$$d) E[X] = np = 10 \cdot 0.2 = 2$$
$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 1.6$$

$$e) Y = 2 \cdot X - 3$$

$$\rightarrow E[Y] = E[2X - 3] = E[2X] - E[3]$$
$$= 2E[X] - 3$$
$$= 2 \cdot 2 - 3$$
$$= 1$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}[2X - 3] = \text{Var}[2X] = 2^2 \text{Var}(X)$$
$$= 4 \cdot 1.6$$
$$= 6.4$$

$$\begin{aligned} F) \quad Z = X^2 &\Rightarrow E[Z] = E[X^2] \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \text{Var}(X) + E(X)^2 \\ &= 1.6 + 2^2 \\ &= 5.6 \end{aligned}$$

P3

Pregunta 3

Usted administra una granja de gallinas felices y está considerando comprar por adelantado alimento para la siguiente temporada, ya que el precio actual es relativamente bajo y se quiere proteger contra futuras alzas. Ha calculado que para la siguiente temporada necesita **10.000 kilos de alimento**. Si compra ahora, el costo por kilo es de **\$3.000** (suponga que no hay costo extra por almacenar el alimento hasta la siguiente temporada). De acuerdo a su conocimiento del mercado, pronostica que hay tres escenarios posibles para el valor del alimento en la siguiente temporada: (i) el bueno, en que el precio es **\$1.000** por kilo, (ii) el intermedio, con **\$4.000** por kilo, y (iii) el malo, con **\$8.000** por kilo. Estos escenarios ocurren con probabilidad $3/4$, $1/8$ y $1/8$, respectivamente.

1. Llame X al costo por kilo en la siguiente temporada. Calcule el rango, la PMF, la CDF, el valor esperado y la varianza de X .
2. Suponga que si termina pagando más de \$50.000.000 la granja se va a la quiebra. Calcule (i) la probabilidad de que la granja quiebre si no compra nada ahora, y (ii) la probabilidad de que la granja quiebre si compra los 10.000 kilos ahora.
3. Llame Y_z al costo total que terminaría pagando si compra $0 \leq z \leq 10.000$ kilos ahora, es decir, el costo de z kilos al precio de hoy, más el costo de $(10.000 - z)$ kilos al precio de la siguiente temporada. Calcule el rango y el valor esperado de Y_z (expresé estas respuestas en función de z). ¿Qué cantidad z le conviene comprar ahora si su objetivo es minimizar $E[Y_z]$?
4. Calcule la probabilidad de quebrar en términos de z . ¿Qué cantidad z le conviene comprar ahora si su objetivo es minimizar $E[Y_z]$, pero evitando a toda costa la quiebra (es decir, sujeto a que la probabilidad de quiebra es 0)?

$$1) R_X = [1000, 4000, 8000]$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/4 & \text{si } x = 1000 \\ 1/8 & \text{si } x = 4000 \\ 1/8 & \text{si } x = 8000 \end{cases}$$

$$\text{CDF, } F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1000 \\ 3/4 & \text{si } 1000 \leq x < 4000 \\ 7/8 & \text{si } 4000 \leq x < 8000 \\ 1 & \text{si } x \geq 8000 \end{cases}$$

$$E[X] = 3/4 \cdot 1000 + 1/8 \cdot 4000 + 1/8 \cdot 8000 = 2250$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\rightarrow E(X^2) = 3/4 \cdot 1000^2 + 1/8 \cdot 4000^2 + 1/8 \cdot 8000^2 = 5062500$$

$$\rightarrow \text{Var}(X) = 5687500$$

2)

i) $10\,000 \text{ Kg} \cdot X$, solo cuando $X=8000$, $10\,000 X > \$50\text{M}$

$$\rightarrow P(\text{quiebra}) = P(X=8000) = 1/3$$

ii) $10\,000 \cdot 3000 = \$30\text{M} < \50M

$$\rightarrow P(\text{quiebra}) = 0$$

3) Y_z costo de comprar z kilos ahora y $(10\,000 - z)$ en el futuro

$$\rightarrow Y_z = z \cdot 3000 + (10\,000 - z) X$$

$$\rightarrow R_{Y_z} = \left[\underset{X=1000}{2000z + 10\text{M}}, \underset{X=4000}{40\text{M} - 1000z}, \underset{X=8000}{80\text{M} - 5000z} \right]$$

$$\begin{aligned} E[Y_z] &= E[3000z + (10\,000 - z)X] \\ &= E[3000z] + E[(10\,000 - z)X] \\ &= 3000z + (10\,000 - z)E[X] \\ &= 3000z + (10\,000 - z) \cdot 2250 \\ &= 22\,500\,000 + 750z \end{aligned}$$

mem $E[Y_z]$, $E[Y_z]$ es lineal en z y es creciente, lo más conveniente es comprar $z=0$

4) $P(\text{quiebra}) = P(Y_z > 50\text{M})$

$$\begin{aligned} \rightarrow 10\text{M} + 2000z &\geq 50\text{M} \rightarrow z \geq 20\,000 \\ 40\text{M} - 1000z &\geq 50\text{M} \rightarrow z \leq -10\,000 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \rightarrow 10\text{M} + 2000z &\geq 50\text{M} \\ 40\text{M} - 1000z &\geq 50\text{M} \end{aligned}} \right\} \text{imposible}$$

pero $80\text{M} - 5000z > 50\text{M}$, sucede con $z < 6000$

$$\rightarrow P(\text{quiebra}) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } z < 6000 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

para evitar la quiebra $z \gg 6000$,

$\min E[Yz]$ pero evitando la quiebra, $E[Yz]$ es lineal y creciente, para $\min E[Yz]$, $z = 6000$