



Auxiliar #5

Variable Aleatoria Discreta (Again :D)

Resumen

- Esperanza: La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria X , se denota $\mathbb{E}[X]$ o μ_x y es un promedio ponderado de los valores que pueden tomar x , y los ponderadores son las probabilidades respectivas asociadas a cada valor

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x \cdot p_X(x)$$

- Esperanza de una función de una variable aleatoria:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) \cdot p_X(x)$$

- Linealidad de la esperanza: Si $g(x) = a + bX$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

- Esperanza de suma de variables aleatorias: Sean X_1, X_2, \dots, X_n con esperanza finita. Entonces

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$$

- Varianza de una VA:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}[X]$$

- Desviación Estándar de una VA:

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

- Coeficiente de Variación:

$$CV(X) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E[X]}$$

- Distribuciones conocidas:

– Bernoulli: Sea $X \in \{0, 1\}$, $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$, $E[X] = p$ y $\text{Var}(X) = p(1-p)$

– Binomial: Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E[X] = np$, $\text{Var}[X] = np(1-p)$

- Hipergeométrica: $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, K, n)$ con $N, K, n \in \mathbb{Z}_+$, $K, n \leq N$, $R_x = \{\max\{0, n + K - N\}, \dots, \min\{K, N\}\}$, con PMF

$$P_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{con } E[X] = n \frac{K}{N} \text{ y } \text{Var}[X] = n \frac{K}{N} \frac{(N-K)}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

Pregunta 1

Pepe quería recordar viejos tiempos e instaló el clásico juego *Preguntados*. Este consiste en responder preguntas de 4 alternativas relacionadas a distintas temáticas. En este momento, a Pepe le queda responder 3 preguntas correctamente para ganar. Estas preguntas serán de las siguientes temáticas secuencialmente: Ciencia, Entretenimiento e Historia. Pepe sabe mucho de cultura pop, pero no es tan estudioso, por lo que su probabilidad de acertar en la pregunta de Entretenimiento es $\frac{3}{4}$ y su probabilidad de acertar en las otras categorías es $\frac{1}{4}$ (responde completamente al azar). Si Pepe se equivoca en alguna pregunta no puede contestar las que siguen (pierde inmediatamente). Considere X como el número de preguntas que Pepe responde correctamente.

- ¿Cuál es el rango de X ?
- Encuentre la PMF de X
- Calcule la Esperanza de X
- Calcule la Varianza de X

Ahora considere que si Pepe gana esta partida será premiado con 1280 monedas del juego, pero en caso de perder incurrirá en una cota de 64 monedas por participar.

- ¿Cuál es la ganancia esperada de Pepe?

Pregunta 2

Un tirador de tiro skeet tiene 10 disparos, la probabilidad de acertar al blanco es de 0.2 (cada tiro es independiente). Sea X el número de aciertos

- Calcule la PMF de X
- ¿Cuál es la probabilidad de no acertar a ningún disco?
- ¿Cuál es la probabilidad de que acierte más veces de las que falla?
- Calcule la Esperanza y Varianza de X
- Suponga que el tirador tiene que pagar \$3 para entrar al torneo y que gana \$2 por cada tiro en el que acierta. Sea Y su ganancia, encuentre su Esperanza y Varianza.
- Ahora suponga que no tiene que pagar para entrar al torneo y que su ganancia es el número de aciertos al cuadrado. Si Z es su ganancia, encuentre la Esperanza de Z

Pregunta 3

Usted administra una granja de gallinas felices y está considerando comprar por adelantado alimento para la siguiente temporada, ya que el precio actual es relativamente bajo y se quiere proteger contra futuras alzas. Ha calculado que para la siguiente temporada necesita 10.000 kilos de alimento. Si compra ahora, el costo por kilo es de \$3.000 (suponga que no hay costo extra por almacenar el alimento hasta la siguiente temporada). De acuerdo a su conocimiento del mercado, pronostica que hay tres escenarios posibles para el valor del alimento en la siguiente temporada: (i) el bueno, en que el precio es \$1.000 por kilo, (ii) el intermedio, con \$4.000 por kilo, y (iii) el malo, con \$8.000 por kilo. Estos escenarios ocurren con probabilidad $3/4$, $1/8$ y $1/8$, respectivamente.

1. Llame X al costo por kilo en la siguiente temporada. Calcule el rango, la PMF, la CDF, el valor esperado y la varianza de X .
2. Suponga que si termina pagando más de \$50.000.000 la granja se va a la quiebra. Calcule (i) la probabilidad de que la granja quiebre si no compra nada ahora, y (ii) la probabilidad de que la granja quiebre si compra los 10.000 kilos ahora.
3. Llame Y_z al costo total que terminaría pagando si compra $0 \leq z \leq 10.000$ kilos ahora, es decir, el costo de z kilos al precio de hoy, más el costo de $(10.000 - z)$ kilos al precio de la siguiente temporada. Calcule el rango y el valor esperado de Y_z (expresé estas respuestas en función de z). ¿Qué cantidad z le conviene comprar ahora si su objetivo es minimizar $E[Y_z]$?
4. Calcule la probabilidad de quebrar en términos de z . ¿Qué cantidad z le conviene comprar ahora si su objetivo es minimizar $E[Y_z]$, pero evitando a toda costa la quiebra (es decir, sujeto a que la probabilidad de quiebra es 0)?