Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves
Aux's: Leonardo Meneses - Giovanna Gattini

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar #3

Conteo

Resumen

- **Definición clásica de Probabilidad:** Si en un experimento, todos los posibles resultados (elementos de Ω) son igualmente probables; entonces, la probabilidad de un evento $A \subset \Omega$ es la cardinalidad de A dividido por la cardinalidad de Ω (*"Casos favorables divididos en casos totales posibles"*):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- **Principio de Multiplicación:** Si realizamos r experimentos tales que el k-ésimo experimento tiene n_k posibles resultados; entonces, el número de posibles resultados para la secuencia (ordenada) de r experimentos es:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots \cdot n_r$$

- **Muestreo Aleatorio:** Seleccionar elementos de un conjunto de tal manera que cada elemento pueda ser escogido con la misma probabilidad.
  - Muestreo ordenado con reemplazo $n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$
  - Muestreo ordenado sin reemplazo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
  - Muestreo no-ordenado sin reemplazo $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
  - "Muestreo" (conteo) no-ordenado con reemplazo $\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$

- **Teorema:** El numero de soluciones tales que $x_i \in \{0, 1, 2, ..., k\}$ y $x_1 + x_2 + ...x_n = k$ es:

$$\left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$$

Pregunta 1

Usted es la persona encargada del área de Bases de Datos de una desconocida organización. Se le solicita generar los identificadores de cada persona (comúnmente conocidas como *id*) que hay en la organización. La única condición que le imponen es que el identificador consista en una secuencia de 7 dígitos del sistema decimal, que incluya al *id* cero (0.000.000). Antes de generar los identificadores de cada persona, le parece buena idea plantearse las distintas posibilidades que tiene de generar estos *id*, por lo que se pregunta:

a) ¿Cuántas *id* de largo 10 se pueden generar en total?¿Cómo cambia este resultado si no permitimos repeticiones de dígitos en el *id*? (considere como largo del *id* a la cantidad de dígitos del sistema decimal que puede tener la secuencia)

b) ¿Cómo cambia la pregunta anterior si ahora quiero identificadores de largo 7?

c) Suponiendo que la organización tiene la misma cantidad de miembros que la cantidad de posibles combinaciones de *id* de largo 7 y que los asignamos todos de manera única, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger un miembro cualquiera este tenga un *id* sin dígitos repetidos?

Pregunta 2

Un grupo de 4 alumnos de un curso se coordinan para responder las 12 preguntas de una Tarea (cada uno tiene que responder 3 preguntas). Si los problemas se reparten al azar

a) ¿De cuantas maneras se pueden repartir los problemas?

b) Calcule la probabilidad de que el primer alumno tenga que hacer problemas consecutivos

c) Calcule la probabilidad que todos tengan problemas consecutivos

Pregunta 3

Se ha inaugurado una nueva galería de arte en la cual se expondrán grandes trabajos de pintores y fotógrafos del país.

1. Uno de los grades atractivos de esta galería de arte será "El gran salón", el cual cuenta con m posiciones específicas para exponer cuadros grandes y n para cuadros pequeños. Se sabe además que se tiene un total de r cuadros grandes y s cuadros pequeños a ser potencialmente incluidos en "El gran salón". Sin embargo, no es posible incluir todos los cuadros grandes en "El gran salón", pues la cantidad de cuadros grandes es mayor a la cantidad de espacios disponibles para cuadros grandes. Similarmente ocurre lo mismo para los cuadros pequeños, es decir, no es posible poner todos los cuadros pequeños en "El Gran Salón". Además, no se pueden exponer cuadros pequeños en posiciones destinadas para cuadros grandes, ni vice versa. ¿Cuántas configuraciones diferentes existen para "El gran salón"? (Notar que dos configuraciones son diferentes si es que en al menos una posición poseen un cuadro distinto. Además, una configuración tiene que tener todas las posiciones disponibles de "El Gran Salón" con un cuadro de su respectivo tipo).

2. Otro de los grandes salones es el "Salón circular". Este es un salón donde se exponen fotografías, las cuales están una al lado de la otra completando la circunferencia del salón. Suponga que hay un total de L fotografías, donde cada fotografía está dos veces: una vez en colores y una vez en blanco y negro. El "Salón circular" tiene $2L$ posiciones disponibles. Similarmente al "El gran salón", una persona todas las mañana ubica las fotografías al azar en el "Salón circular". ¿Cuál es la probabilidad de que las fotografías del "Salón circular" queden intercaladas? Es decir, que una fotografía a color tenga a sus dos lados fotografías en blanco y negro, y similarmente, que a ambos costados de cada fotografía en blanco y negro hayan fotografías a color. *Hint:* Podría ser de utilidad pensar en "fijar la posición de uno de los cuadros".

3. Otro de los grandes atractivos, es el "Salón de Pigmentos". En este se pueden crear diferentes colores según desee la persona. Para crear un color, se tiene una máquina que extrae diferentes cantidades de los tres pigmentos base: "Rojo", "Azul", y "Amarillo". El color está listo una vez que se tiene un total de 80 *unidades de volumen* de pigmentos, los cuales son mezclados hasta obtener un color homogéneo. La máquina extrae de a una *unidad de volumen* a la vez de cada pigmento, y puede repetir el proceso varias veces. No se pueden extraer cantidades fraccionales de *unidades de volumen* de los pigmentos. Su amigo Esteban visita el "Salón de Pigmentos", y decide crear colores. Sin embargo, dado su gusto por los pigmentos "Rojo" y "Azul", Esteban incluirá **al menos** 7 *unidades de volumen* del pigmento "Rojo", y 3 *unidades de volumen* del pigmento "Azul". No hay restricción sobre el número de *unidades de volumen* a usar del pigmento "Amarillo". ¿Cuántos son el total de colores que Esteban puede crear? Notar que la creación de un color es conmutativa, es decir, el color depende solo de la cantidad de *unidades de volumen* que posea de cada tipo de pigmento, y no de la secuencia en que éstos fueron añadidos por la máquina.