



Auxiliar #2

Ley Probabilidades Totales, Regla de Bayes e Independencia Condicional

Resumen

- **Probabilidades Totales:** Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición de Ω , para un evento $B \in \Omega$ se tiene;
 $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$
- **Teorema de Bayes:** $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$
- **Independencia Condicional:** A y B son condicionalmente independientes dado un evento C (con $P(C) > 0$) si: $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C)$
Recordar que si A y B son condicionalmente independientes dado C , no necesariamente son independientes por si solos, tampoco al revés.

Pregunta 1

Demuestre que

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C) \Leftrightarrow P(A|B \cap C) = P(A|C)$$

Solución

Primero demostraremos hacia la derecha y luego hacia la izquierda:

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C) \Rightarrow P(A|B \cap C) = P(A|C)$$

Por probabilidad condicional sabemos que:

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B|C) \cdot P(C)}{P(B|C) \cdot P(C)}$$

Ahora por hipótesis:

$$\frac{P(A|C) \cdot P(B|C)}{P(B|C)} = P(A|C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C) \Leftarrow P(A|B \cap C) = P(A|C)$$

Por probabilidad condicional:

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A|B \cap C) \cdot P(B \cap C)}{P(C)}$$

Por hipótesis y probabilidad condicional:

$$\frac{P(A|C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)}{P(C)} = P(A|C) \cdot P(B|C)$$

Pregunta 2

Existe una especie de lagartos que habitan por general en Estados Unidos o México. Estos lagartos tienen la particularidad de que los machos se dividen en 3 categorías: rojos, amarillos y naranjos. Imagine que usted va de excursión por las zonas en donde suelen habitar y se da cuenta de que el 56% de la población son machos. Además, puede notar que 37% de los machos son naranjos, el 33% son amarillos y el 30% restante es de color rojo. Vamos a imaginar que estos especímenes son una nueva mutación, por lo que las hembras también se dividen en estos 3 colores, y usted puede darse cuenta que en las hembras el 40% es de color rojo, el 25% es de color naranja y el 35% restante es de color amarillo. Si usted captura uno de estos ejemplares al azar, entonces:

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarillo?
- (b) Si observa que es naranja ¿Cuál es la probabilidad de que sea macho?

Solución

- (a) Se busca la probabilidad que sea amarillo $P(A)$, para esto se utilizan probabilidades totales dado que los lagartos pueden ser machos (M) o hembras (H):

$$P(A) = P(A|M) \cdot P(M) + P(A|H) \cdot P(H)$$

$$P(A) = 0.33 \cdot 0.56 + 0.35 \cdot 0.44$$

$$P(A) = 0.3388$$

- (b) Se quiere calcular la probabilidad de que el lagarto sea macho dado que es Naranja (N), $P(M|N)$, se utiliza el Teorema de Bayes

$$P(M|N) = \frac{P(N|M) \cdot P(M)}{P(N)}$$

Ahora para calcular $P(N)$ se utilizan probabilidades totales

$$P(M|N) = \frac{P(N|M) \cdot P(M)}{P(N|M) \cdot P(M) + P(N|H) \cdot P(H)}$$

$$P(M|N) = \frac{0.37 \cdot 0.56}{0.37 \cdot 0.56 + 0.25 \cdot 0.44}$$

$$P(M|N) = 0.653216$$

Pregunta 3

Juanito tiene un U-Test del cual depende que pase un ramo y así pueda (finalmente) salir de Plan Común. Este consta de una sola pregunta con 5 alternativas. Juanito sabe la respuesta con probabilidad p y no la sabe con probabilidad $1 - p$. Si se sabe la respuesta, contesta la alternativa correcta. En caso contrario, responde al azar. Si Juanito contestó la pregunta de manera correcta, ¿Cuál es la probabilidad de que supiera la respuesta?

Solución

Sea A el evento de que Juanito sabe la respuesta y B el evento que contesta de manera correcta.

Lo que nos pide el enunciado es calcular $P(A|B)$ para esto usamos el Teorema de Bayes.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Como sabemos que si sabe la respuesta, contesta bien, entonces $P(B|A) = 1$, por enunciado sabemos que $P(A) = p$ y para calcular $P(B)$ usamos Probabilidades Totales

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot p}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)}$$

Sabemos por enunciado que si no sabe la respuesta, contesta al azar, lo que es equivalente a que $P(B|A^c) = \frac{1}{5}$ y también por enunciado sabemos que $P(A^c) = (1 - p)$

$$P(A|B) = \frac{p}{1 \cdot p + \frac{1}{5} \cdot (1 - p)}$$

$$P(A|B) = \frac{5p}{4p + 1}$$

termino plan comun

yo:



VAMOS CHILE, 1% DE PROBABILIDADES Y 99% DE FE