



Auxiliar #1

Probabilidad Condicional e Independencia

Resumen

- **Ley de De Morgan:**

1. $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$
2. $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$

- **Ley Distributiva:**

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Axiomas de Probabilidad:

- **No-negatividad:** $P(A) \geq 0, \forall A \subset \Omega$
- **Normalización:** $P(\Omega) = 1$
- **Aditividad:** Si $A_1, A_2, \dots$ disjuntos, $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

Propiedades:

- **Probabilidad del complemento:** $P(A^c) = 1 - P(A)$
- **Probabilidad del Vacío:** $P(\emptyset) = 0$
- **Monotonía:** $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- **Probabilidad de la resta:** $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- **Principio de inclusión - exclusión:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidad Condicional:

Si A y B son eventos de un mismo espacio muestral. Entonces la **probabilidad condicional** de **A** dado **B** se define como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ cuando } P(B) > 0$$

Independencia:

Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pregunta 1

Ben Brereton debe llegar al entrenamiento con La Roja en Pinto Durán. Como estamos en invierno, llueve uno de cada tres días, lo que provoca que hayan tacos. Si llueve, hay taco con probabilidad de $\frac{3}{4}$ y si no llueve, hay taco con probabilidad de $\frac{1}{4}$. Si llueve y hay taco, Ben llega tarde al entrenamiento con probabilidad $\frac{4}{5}$. Pero, si no llueve y no hay taco, llegará tarde con probabilidad $\frac{1}{8}$. En las otras situaciones (que llueva y no haya taco o que no llueva y haya taco) la probabilidad de que llegue tarde es $\frac{1}{4}$.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva, haya taco y que no llegue tarde?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde?
3. Dado que llega tarde al entrenamiento, ¿Cuál es la probabilidad de que haya llovido ese día?

Solución

Sea R el evento de que llueva, T el evento de que haya taco y L el evento de que llegue tarde.

1. La probabilidad de que no llueva, haya taco y que no llegue tarde se puede escribir de la siguiente manera:

$$P(R^c \cap T \cap L^c)$$

Usemos la regla de la cadena!

$$P(R^c \cap T \cap L^c) = P(L^c | R^c \cap T) \cdot P(T | R^c) \cdot P(R^c)$$

$$P(R^c \cap T \cap L^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$P(R^c \cap T \cap L^c) = \frac{1}{8}$$

2. Veamos todos los casos donde se pueda llegar tarde

$$P(L) = P(R \cap T \cap L) + P(R \cap T^c \cap L) + P(R^c \cap T \cap L) + P(R^c \cap T^c \cap L)$$

$$P(L) = \frac{1}{5} + \frac{1}{48} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16}$$

$$P(L) = \frac{13}{40}$$

3. Buscamos $P(R|L)$ usamos probabilidad condicional

$$P(R|L) = \frac{P(R \cap L)}{P(L)}$$

Ya encontramos $P(L)$, por lo que solo resta encontrar $P(R \cap L)$, para esto sumamos cuando hay taco y cuando no.

$$P(R \cap L) = P(R \cap L \cap T) + P(R \cap L \cap T^c)$$

$$P(R \cap L) = \frac{1}{5} + \frac{1}{48}$$

$$P(R \cap L) = \frac{53}{240}$$

Entonces $P(R|L)$ es:

$$P(R|L) = \frac{53}{240} \cdot \frac{40}{13}$$

$$P(R|L) = \frac{53}{78}$$

Pregunta 2

Spiderman tiene que salvar el Multiverso, para esto los actores que dan vida al arácnido súper-héroe deben salvar su propio universo en el siguiente orden: Primero Tobey Maguire, luego Andrew Garfield y por ultimo Tom Holland. Si uno falla, los siguientes no podrán salvar su universo. La probabilidad de que el Spiderman de Tobey Maguire salve su universo es de 0.9, la probabilidad de que el Spiderman de Andrew Garfield salve su universo dado que Tobey Maguire salvó el suyo es de 0.8. Si estos dos Spidermans salvan sus universos, la probabilidad de que el Spiderman de Tom Holland salve su universo es de 0.7.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los Spiderman salven sus universos?
2. Dado que no pudieron salvar los 3 universos, ¿Cuál es la probabilidad de que el Spiderman de Andrew Garfield haya fallado?

Solución

Definamos S_i el evento de que el i -ésimo Spiderman salve su universo. Las probabilidades son las siguientes:

$$P(S_1) = 0.9; P(S_2|S_1) = 0.8; P(S_3|S_1 \cap S_2) = 0.7$$

1. La probabilidad que buscamos es $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$ y usamos la Regla de la Cadena

$$P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2|S_1) \cdot P(S_3|S_1 \cap S_2) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 = 0.504$$

2. La probabilidad que buscamos es $P(S_2^c|(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)$ y la podemos escribir de la siguiente manera usando Probabilidad Condicional:

$$P(S_2^c|(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c) = \frac{P(S_2^c \cap (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)}{P((S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c)}$$

Analizamos primero los conjuntos del numerador:

$$S_2^c \cap (S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c$$

Se utiliza la Ley de De Morgan y les haremos un arreglo:

$$S_2^c \cap (S_1^c \cup S_2^c \cup S_3^c) = S_2^c \cap (S_1^c \cup (S_1 \cap S_2^c) \cup (S_1 \cap S_2 \cap S_3^c))$$

Este arreglo se hace pues no podemos llegar al caso de que S_2^c sin que el primer Spiderman salvara su universo (análogo para el caso de S_3^c). Ahora utilizando la Ley Distributiva:

$$(S_1^c \cap S_2^c) \cup (S_1 \cap S_2^c \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_2 \cap S_2^c \cap S_3^c)$$

Queda claro que $S_2^c \cap S_2 = S_2^c$ y como S_2 y S_2^c son conjuntos disjuntos, la intersección de estos será vacía ($S_2 \cap S_2^c = \emptyset$). Entonces el conjunto resultante será $((S_1^c \cap S_2^c) \cup (S_1 \cap S_2^c))$. Calculamos la probabilidad de este conjunto usando el Principio de Inclusión-Exclusión.

$$P((S_1^c \cap S_2^c) \cup (S_1 \cap S_2^c)) = P(S_1^c \cap S_2^c) + P(S_1 \cap S_2^c) - P(S_1^c \cap S_2^c \cap S_1 \cap S_2^c)$$

Como $S_1^c \cap S_1 = \emptyset$ y sabemos que la $P(\emptyset) = 0$, solo sobreviven los 2 primeros términos a los que le aplicaremos Probabilidad Condicional.

$$P(S_2^c|S_1^c) \cdot P(S_1^c) + P(S_2^c|S_1) \cdot P(S_1)$$

Pero no podemos llegar al caso de S_2^c si no sucedió S_1 , entonces $P(S_2^c|S_1^c) = 0$. Solo sobrevive el segundo término.

$$P(S_2^c|S_1) \cdot P(S_1) = (1 - P(S_2|S_1)) \cdot P(S_1) = (1 - 0.8) \cdot 0.9 = 0.18$$

Ahora nos falta el denominador, pero $P(S_1 \cap S_2 \cap S_3)^c = 1 - P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 1 - 0.504$. Entonces el resultado final es $\frac{0.18}{0.496} = 0.363$

Pregunta 3

La variante Delta del COVID ha afectado al 0.1 % de la población en Reino Unido. Los últimos estudios han revelado que los tests PCR tienen un 95 % de exactitud. Es decir, 95 de cada 100 tests que se hacen arrojan el resultado correcto. Si una persona ha dado positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectada?

Solución

Para saber la probabilidad de que una persona esté infectada dado que el test ha salido positivo se calcula la siguiente probabilidad condicional:

$$P(\text{infectada}|\text{testpositivo}) = \frac{P(\text{infectada} \cap \text{testpositivo})}{P(\text{testpositivo})}$$

Por enunciado, sabemos la probabilidad de una persona infectada y con test positivo, lo que es lo mismo que decir que al elegir a una persona del total de la población esté infectada y haya recibido un diagnóstico correcto del PCR.

$$P(\text{infectada} \cap \text{testpositivo}) = \frac{1}{1000} * \frac{95}{100} = 0.00095$$

Por otro lado, sabemos que podemos recibir un test positivo de dos maneras distintas, si una persona infectada recibe un buen diagnóstico del PCR o si una persona sana por error resulta positiva.

$$P(\text{testpositivo}) = P(\text{infectada} \cap \text{testpositivo}) + P(\text{sana} \cap \text{testpositivo}) = \frac{1}{1000} * \frac{95}{100} + \frac{999}{1000} * \frac{5}{100} = 0.0509$$

Luego, reemplazando se obtiene:

$$\frac{P(\text{infectada} \cap \text{testpositivo})}{P(\text{testpositivo})} = \frac{0.00095}{0.0509} = 0.0186 \approx 2\%$$

