IN2201 - Economía

Auxiliar Pre Control 1

P1. Escasez

En este problema se busca estudiar la demanda de un bien adictivo. Para esto, suponga que las preferencias de una persona pueden ser representadas por:

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - r)^\alpha x_2^{1-\alpha}$$

Donde $\alpha \in (0,1)$ y $r > 0$ son parámetros conocidos. Notar que esta función de utilidad sólo está definida para $(x_1 - r) \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

Los precios de los bienes x_1 y x_2 son p_1 y p_2 respectivamente. Esta persona cuenta con un ingreso fijo igual a I. Diremos que x_1 es el bien adictivo cuyo nivel de adicción es r (ejemplos de bienes adictivos son alcohol, cigarros, drogas, chocolates).

Para efectos de la interpretación de los resultados de esta pregunta, tenga presente que personas más adictas presentaran un nivel de r mayor.

a) Calcule la derivada de la función utilidad con respecto a r y concluya cómo cambia la utilidad de esta persona con r. Entregue una interpretación económica para el signo de esta derivada.

   Derivando parcialmente respecto a r:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\alpha \left(\frac{x_2}{x_1 - r}\right)^{1-\alpha} < 0$$

   Como x_1, x_2 y α son positivos, entonces la derivada es negativa, por lo tanto, la utilidad es decreciente respecto a r. Esto quiere decir que un aumento de r, para un mismo nivel de consumo (x_1, x_2) empeora la utilidad que percibe la persona.

b) Analice como cambia la utilidad marginal respecto a x_1 cuando r varía. Es decir, calcule la segunda derivada de la Utilidad, primero con respecto a x_1 y después con respecto a r. Entregue una interpretación económica para el signo de esta última expresión.

   Calculando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}[(x_1 - r)^\alpha x_2^{1-\alpha}]\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha (x_1 - r)^{\alpha - 1} x_2^\alpha\right)\\ &= \alpha(1-\alpha)(x_1 - r)^{\alpha-1} x_2^\alpha > 0\end{aligned}$$

   La expresión anterior nos dice que la utilidad marginal percibida por el bien x_1 es creciente respecto a r, por lo tanto, mayores niveles de adicción implican una mayor aumento de la utilidad por unidad adicional del bien x_1 consumido, visto de otra forma, mayores niveles de adicción vuelven más 'inelástico" el consumo del bien x_1.

c) Plantee y resuelva el problema de optimización que enfrenta esta persona.

El problema de optimización es:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & (x_1 - r)^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ \text{s.a.} & p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I \end{array}$$

Y la función lagrangeana:

$$L = (x_1 - r)^{\alpha} x_2^{1-\alpha} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

Utilizando condiciones de primer orden:

$$L'_{x_1} = \alpha(x_1 - r)^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} \stackrel{!}{=} \lambda p_1$$
$$L'_{x_2} = (1-\alpha)(x_1 - r)^{\alpha} x_2^{-\alpha} \stackrel{!}{=} \lambda p_2$$
$$L'_{\lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 \stackrel{!}{=} I$$

Podemos utilizar las dos primeras expresiones, despejando lambda, y la tercera relación para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\alpha(x_1 - r)^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(x_1 - r)^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{p_1}{p_2}$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \stackrel{!}{=} I$$

Y resolviendo, tenemos las siguientes expresiones para x_1^* y x_2^*:

$$x_1^* = \frac{I\alpha}{p_1} + (1-\alpha)r$$

$$x_2^* = \frac{I(1-\alpha)}{p_2} - \alpha(1-\alpha)r\frac{p_1}{p_2}$$

P2. Teoría de Juegos y Asignaciones

Hay 5 mil pesos para dividir entre dos jugadores. Cada jugador puede demandar cantidades $S_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si la suma de las peticiones excede a 5, los jugadores no reciben nada. Si la suma de las peticiones es igual o menor a 5, los jugadores reciben exactamente sus peticiones.

a) Escriba la matriz de pagos del juego.

Escribiendo pago por pago:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(0,0)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(0,0)	(0,0)
3	(3,1)	(3,2)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
4	(4,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
5	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)

Podemos eliminar las estrategias dominadas para que nos quede una tabla más sencilla:

	1	**2**	**3**	**4**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(0,0)
3	(3,1)	(3,2)	(0,0)	(0,0)
4	(4,1)	(0,0)	(0,0)	(0,0)

b) Encuentre el conjunto de Equilibrios de Nash. ¿Son pareto eficientes?

El conjunto de equilibrios es $EN = \{(4, 1); (3, 2); (2, 3); (1, 4); \}$. Todos estos equilibrios son pareto-eficientes, se verifica dado que no existe ninguna otra asignación donde ambos jugadores mejoren y nadie empeore

P3. Monopolio y Discriminación

La empresa de ferrocarriles del estado (EFE) esta evaluando la posibilidad de operar un tren que una las ciudades de Santiago y Valparaiso. El tren cuenta con capacidad de 200 asientos de segunda clase, pero parte del tren (o su totalidad) puede ser usada para asientos de primera clase, los cuales utilizan el doble de espacio que un asiento de segunda clase (así pues, si todo el tren se destina a primera clase su capacidad es de 100 asientos). Se sabe que las demandas de asientos están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$P_1(q_1) = 12{,}000 - 20q_1, \qquad P_2(q_2) = 10{,}000 - 20q_2,$$

donde P_1 y Q_1 son el precio y la cantidad de asientos de primera clase, mientras que P_2 y Q_2 son el precio y la cantidad de asientos de segunda clase. Los costos de operar el tren son de \$1.250.000 independiente de la cantidad de pasajeros que vayan en él.

a) Suponga que la regulación no permite discriminar precios y solo se puede ofrecer un precio, de modo que todo el tren debe ser de primera clase o todo el tren debe ser de segunda clase. Encuentre el precio y la cantidad óptima (y si el tren debe ser de primera o segunda clase) y determine los ingresos generados. ¿Es rentable el proyecto?

Se debe calcular el precio y cantidad que maximicen las utilidades de EFE para cada uno de los tipos de asiento que podría vender. Entonces (para $i = 1, 2$) , se resuelve el problema:

$$\max_{q_i} \quad \pi(q_i) = P_i(q_i)q_i - F$$

Notar que existe una restricción de capacidad que es 100 para Q_1 y 200 para Q_2. El problema se puede resolver incluyendo la restricción o simplemente encontrar una cantidad óptima, y en caso que supere la restricción impuesta, entonces el máximo se encuentra en esa esquina. Se puede resolver el problema maximizando para precio, cantidad o ocupando la condición $IM = CM$. Lo resolveremos de esta última manera.

Notar que los costos marginales son 0 porque el único costo que hay es un costo fijo.

1º Clase

$$I_1(Q_1) = (12{,}000 - 20Q_1)Q_1 \Rightarrow IM(Q_1) = 12{,}000 - 40Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1 = 300$$

Nos gustaría vender 300 pasajes, pero se tiene capacidad para vender 100 de primera clase, nos limitamos a vender esa cantidad, luego, el precio de venta y los ingresos obtenidos corresponden a:

- $P_1(100) = 12{,}000 - 20(100) = 10{,}000$
- $I_1(100) = 10{,}000 * 100 = 1{,}000{,}000$

2º Clase

$$I_2(Q_2) = (10{,}000 - 20Q_2)Q_2 \Rightarrow IM(Q_2) = 10{,}000 - 40Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = 250$$

Nuevamente, nos gustaría vender 250 pasajes, pero se tiene capacidad para vender 200 de segunda clase y por lo tanto, nos limitamos a vender esa cantidad, luego, el precio de venta y los ingresos corresponden a:

- $P_2(200) = 10{,}000 - 20(200) = 6{,}000$
- $I_2(200) = 6{,}000 * 200 = 1{,}200{,}000$

Luego, las utilidades son el ingreso calculado menos el costo fijo de operar el tren y se observa que ambos escenarios suponen utilidades negativas, por lo tanto, en ningún caso es rentable el proyecto.

(b) (2 puntos) Suponga ahora que si se permite cobrar precios distintos y destinar parte del tren a primera clase y parte a segunda clase. Plantee el problema que EFE debe resolver de tal forma que logre obtener el máximo beneficio posible.

El problema a resolver corresponde a:

$$\max_{Q_1, Q_2 \geq 0} \quad \Pi(Q_1, Q_2) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - CF$$
$$\text{s.a} \quad 2Q_1 + Q_2 \leq 200$$

(c) (2 puntos) Resuelva el problema anteriormente planteado indicando cuáles son las cantidades y precios óptimos de asientos de primera y segunda clase. ¿Cuál es la utilidad generada? ¿Es rentable el proyecto?

Se resolverá el problema utilizando multiplicadores de lagrange.

$$\mathcal{L}(Q_1, Q_2, \lambda) = \Pi(Q_1, Q_2) - \lambda(2Q_1 + Q_2 - 200)$$

Se aplican condiciones de primer orden sobre la función lagrangeana para obtener:

$$(1)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 12{,}000 - 40Q_1 - 2\lambda = 0$$
$$(2)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = 10{,}000 - 40Q_2 - \lambda = 0$$
$$(3)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2Q_1 + Q_2 - 200 = 0$$

Con las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$\Rightarrow 6{,}000 - 20Q_1 = 10{,}000 - 40Q_2$$
$$\Leftrightarrow 4{,}000 - 40Q_2 + 20Q_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow Q_1 = 2Q_2 - 200$$

Y desarrollando (3) se obtiene: $Q_2 = 200 - 2Q_1$

Luego, reemplazando Q_2 llegamos a los siguientes resultados:

$$Q_1 = 40 \wedge P_1 = 11{,}200$$
$$Q_2 = 120 \wedge P_2 = 7{,}600$$
$$I(40, 120) = 40 * 11{,}200 + 120 * 7{,}600 = 1{,}360{,}00$$

En este escenario, donde se puede discriminar por precios, se concluye que si se logra hacer rentable el proyecto del tren puesto que genera utilidades positivas.