

Electrodinámica FI3106-1
Examen: Lunes 20 de diciembre, 2021

Prof. Gonzalo A. Palma.
Auxiliar: Nicolás Parra - Ayudante: Lucas González

Instrucciones: Escriba su nombre y RUT en todas las hojas que entregue. ESTE CONTROL ES INDIVIDUAL. No comente con otras personas los temas o contenidos del control. Ud. no debe recibir ayuda. Ud. no debe otorgar ayuda. Puede consultar la literatura según lo considere pertinente. Esto incluye sus apuntes personales y los apuntes de clase, pero NO incluye apuntes de otras personas. Escriba en su hoja de soluciones la literatura consultada (libros, apuntes propios, problemas resueltos, páginas de internet, etc.). Las respuestas a las preguntas deben ser manuscritas de su propio puño y letra. Escriba claramente: no habrá evaluación si la caligrafía no se entiende. No se aceptarán respuestas escritas en un computador.

Sobre este examen: A continuación se enuncian 3 problemas que repasan distintos aspectos de la materia cubierta. Cada uno de ellos puede ser resuelto de distintas maneras. Usted es libre de escoger el método para enfrentar cada problema. Desarrolle cada problema con el mayor detalle posible, sin saltarse pasos, y justificando claramente cada paso. Si en un problema dado usted no puede avanzar con un cálculo específico, se sugiere que explique cómo proceder, aún sin contar con expresiones analíticas concretas.

P1: Considere ondas electromagnéticas planas $\vec{E}_{\pm}(\vec{r}, t)$ de frecuencia ω y polarizaciones circulares de helicidades positivas y negativas propagándose en la dirección $\hat{z}$. Dichas ondas se propagan en un medio con N electrones por unidad de volumen. Estos electrones (de carga $-e$ y masa m_e) pueden ser descritos como osciladores armónicos ligados con una frecuencia natural ω_0 y coeficiente de roce $m_e\gamma$. Adicionalmente, en el medio existe un campo magnético externo constante $\vec{B} = B_0\hat{z}$.

(a) 1.0 pts. Determine la ecuación de movimiento que debe cumplir la posición $\vec{r}_e(t)$ de un electrón de este medio (con respecto a su posición de equilibrio). Para ello, use $\vec{E}_{\pm}(t) = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}$ en la posición de dicho electrón.

(b) 1.0 pts. Resuelva dicha ecuación para encontrar soluciones $\vec{r}_{\pm}(t)$ para cada helicidad. (Considere soluciones complejas del tipo $\vec{r}_{\pm}(t) = r_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}$).

(c) 2.0 pts. Determine los índices de refracción n_+ y n_- para ondas de polarización circular con helicidades positivas y negativas respectivamente.

(d) 2.0 pts. Considere una onda plana propagándose en la dirección $\hat{z}$ que en $z = 0$ tiene la forma $\vec{E} = E_0\hat{x}e^{-i\omega t}$. Despreciando γ en su resultado de la parte (c), determine la dirección de la polarización de la onda en la posición $z = L$.

Indicación: Recuerde que una onda puede ser escrita como la suma de dos ondas de polarizaciones circulares opuestas.

P2: Una lámina delgada e infinita con una densidad de carga uniforme σ se extiende a lo largo y ancho del plano $z = 0$.

(a) **2.0 pts.** Suponga que, desde siempre, la lámina se mueve a una velocidad constante v en la dirección positiva de y . Calcule el campo magnético producido por la lámina.

Ahora asuma que la lámina ha estado quieta para $t < 0$. En $t = 0$ la lámina comienza a moverse en la dirección $\hat{y}$ con velocidad constante v .

(b) **2.0 pts.** Escriba una expresión para la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Argumente que el potencial retardado $\vec{A}(\vec{r}, t) = A_y(z, t)\hat{y}$ solo depende de z y t . Calcule $A_y(z, t)$, y dibuje su valor como función de t para un z fijo (positivo y negativo). También dibuje $A_y(z, t)$ como función de z para un $t > 0$ fijo.

(c) **2.0 pts.** Calcule B_x y E_y y dibújelos como función de t para un z fijo (positivo y negativo), y también como función de z para un tiempo $t > 0$ fijo. Compare sus resultados con aquellos de la parte (b).

Indicación 1: Recuerde que el potencial retardado $\vec{A}(\vec{r}, t)$ está dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{||\vec{r} - \vec{r}'||} \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}||\vec{r} - \vec{r}'||). \quad (1)$$

Indicación 2: Para la parte (b) considere el uso de coordenadas polares para integrar. Además, podría serle útil recordar la siguiente integral indefinida: $\int^x \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$.

P3: Una carga q gira alrededor de un círculo de radio a centrado en el origen de un sistema de coordenadas. El círculo descansa en el plano (x, y) . La carga se mueve a una velocidad angular constante $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{z}$ alrededor del origen (con $\Omega_0 a \ll c$).

(a) **3.0 pts.** Encuentre los campos eléctricos y magnéticos en la zona de radiación.

(b) **3.0 pts.** Encuentre la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y la potencia total radiada.

P1: (a) Recordemos que $\vec{F} = e(\vec{E} + v \times \vec{B})$, luego la ecuación de movimiento es:

$$m\left(\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_e + \gamma\frac{d}{dt}\vec{r}_e + \omega_0^2\vec{r}_e\right) - eB_0\hat{z} \times \frac{d}{dt}\vec{r}_e = -e\vec{E}. \quad (2)$$

Usando $\vec{E}(\vec{r}_e, t) = E_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}$ en la posición del electrón, y planteando la solución

$$\vec{r}_\pm(t) = r_0(\hat{x} \pm i\hat{y})e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

obtenemos $m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)r_\pm \pm \omega eB_0r_\pm = -eE_0$. Esto implica que

$$r_\pm = \frac{-eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma) \pm \omega eB_0}. \quad (4)$$

(b) Los momentos dipolares asociados a estas soluciones son $\vec{p}_\pm = -e\vec{r}_\pm$. Luego, sigue que

$$n_\pm^2 = \frac{\epsilon_\pm(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma \pm \omega eB_0/m} \quad (5)$$

(c) Cuando $\gamma = 0$ se tiene:

$$\epsilon_\pm(\omega) = \epsilon_0 + \epsilon_0 \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega eB_0/m} \quad (6)$$

Luego, el número de onda de una onda plana propagándose en este medio es:

$$k_\pm = \omega\sqrt{\epsilon_0} \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega eB_0/m}} \quad (7)$$

Una onda plana linealmente polarizada en la dirección $\hat{x}$, en $z = 0$, puede ser escrita como la suma de dos ondas planas circularmente polarizadas:

$$\vec{E} = E_0 \left[\frac{1}{2}(\hat{x} + i\hat{y})e^{ik_+z} + \frac{1}{2}(\hat{x} - i\hat{y})e^{ik_-z} \right] e^{-i\omega t}. \quad (8)$$

Esta puede ser reescrita como:

$$\vec{E} = E_0 [\hat{x} \cos[(k_+ - k_-)L/2] - \hat{y} \sin[(k_+ - k_-)L/2]] e^{i(k_+ + k_-)L/2} e^{-i\omega t}. \quad (9)$$

Luego, la dirección es en el ángulo $\phi = -(k_+ - k_-)L/2$ con respecto al eje $\hat{x}$.

P2: (a) Usando la ley de Ampere se llega directamente a

$$B_x(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2}\sigma v & z > 0 \\ -\frac{\mu_0}{2}\sigma v & z < 0 \end{cases} \quad (10)$$

(b) La densidad de corriente puede ser escrita como:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma v \delta(z) \theta(t) \hat{y}, \quad (11)$$

donde $\theta(t)$ es la función escalón (0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$). Claramente, solo la componente y será distinta de zero:

$$A_y(\vec{r}, t) = \frac{\sigma v \mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\delta(z')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \theta(t - \frac{1}{c} \|\vec{r} - \vec{r}'\|). \quad (12)$$

Por las simetrías del problem, el resultado solo puede depender de z , por lo tanto:

$$A_y(\vec{r}, t) = \frac{\sigma v \mu_0}{4\pi} \int dx' dy' \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + z^2}} \theta(t - \frac{1}{c} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + z^2}). \quad (13)$$

En coordenadas polares: $(x')^2 + (y')^2 = \rho^2$ y $dx' dy' = d\theta \rho d\rho$. Luego

$$A_y(\vec{r}, t) = \frac{\sigma v \mu_0}{2} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \theta(t - \frac{1}{c} \sqrt{\rho^2 + z^2}). \quad (14)$$

Por último, podemos re-expresar este resultado modificando el límite de integración:

$$\begin{aligned} A_y(\vec{r}, t) &= \begin{cases} 0 & t < |z|/c \\ \frac{\sigma v \mu_0}{2} \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} & t > |z|/c \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & t < |z|/c \\ \frac{\sigma v \mu_0}{2} (ct - |z|) & t > |z|/c \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

(c) Tomando $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = B_x \hat{x}$ con $B_x = -\partial_z A_y$, obtenemos que para $ct > |z|$:

$$B_x = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \sigma v & z > 0 \\ -\frac{\mu_0}{2} \sigma v & z < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Por otro lado $E_y = -\partial_t A_y$, lo que para $ct > |z|$ da:

$$E_y = -\frac{\sigma v \mu_0 c}{2}. \quad (17)$$