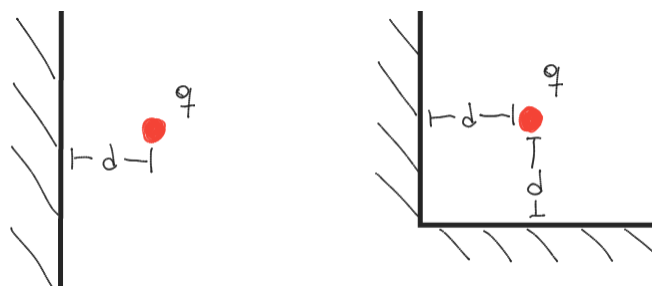


## Auxiliar 6: Conductores y Método de Imágenes.

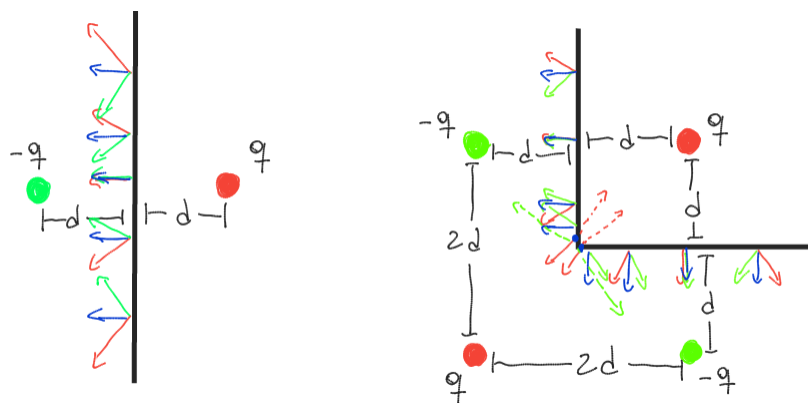
05 de Mayo de 2020

### P1. Carga imagen en un casquete esférico:

- a) El método de las imágenes discutido en cátedra es una herramienta útil para resolver problemas que involucran configuraciones donde existe una distribución de cargas frente a una superficie *conductora*. En clases se discutieron los casos de una carga puntual frente a un plano infinito, y frente a una superficie en forma de “L” infinita, los cuales se muestran a continuación:



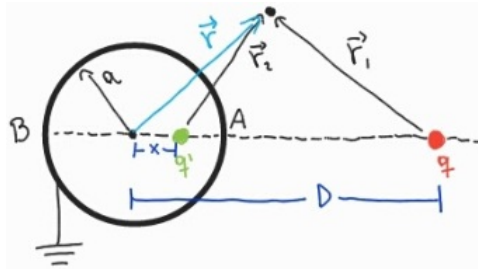
El método de las imágenes se basa en el hecho de que **en un conductor, el campo eléctrico sólo puede ser normal a la superficie**, puesto que en caso contrario existiría una componente del campo eléctrico tangencial a la superficie, lo que provocaría movimiento de cargas sobre ésta, y eso no puede pasar en un conductor<sup>1</sup>. Esta condición sobre el campo eléctrico que acabamos de enunciar también puede cumplirse si en vez de una superficie conductora tenemos una carga de signo contrario en la zona dentro del conductor (donde se cumple que el potencial es constante), de tal forma que la superposición del campo eléctrico de esta carga imaginaria (a la que llamamos carga imagen) con el campo eléctrico de nuestra carga real sea perpendicular a la superficie del conductor. Para los casos presentados anteriormente, es necesario poner las siguientes cargas imágenes que permiten la existencia de un campo de estas características:



Donde las flechas azules indican el resultado de la superposición de todos los campos.

<sup>1</sup>Ya que dentro de un conductor el campo eléctrico debe ser cero, las cargas adoptan la configuración estacionaria que cumple esta condición, entonces no pueden moverse de donde están.

Ahora, el problema que se nos presenta es el de una esfera conductora de radio  $a$ , para la cual la elección de una carga imagen se vuelve algo menos intuitivo. Para escoger el caso más genérico posible diremos que existe una carga imagen  $q'$ , la cual se encuentra a una distancia  $x$  del centro de la esfera. Es importante mencionar que la carga imagen debe estar **dentro del la esfera conductora** (es requisito que esté dentro del conductor), ya que de otra forma estaríamos agregando una carga en el espacio, con lo cual estaríamos cambiando el problema. Por otro lado, por simetría es necesario que esta carga imagen esté alineada con el origen y la carga  $q$ , ya que poner a la carga  $q'$  en otro eje implicaría que el campo eléctrico en algún punto de la superficie de la esfera no fuese perpendicular, y ese no es el caso estudiado (conductor). Entonces, el problema puede resumirse geométricamente en el siguiente dibujo:



Ahora, como la esfera está conectada a tierra entonces su potencial es cero, en particular, el potencial en los puntos  $A$  y  $B$  debe ser cero, entonces:

$$V_A = 0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0(D-a)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(a-x)} = 0 \Rightarrow q' = -q \left( \frac{a-x}{D-a} \right) \quad (1)$$

$$V_B = 0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0(D+a)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(x+a)} = 0 \Rightarrow q' = -q \left( \frac{x+a}{D+a} \right) \quad (2)$$

Podemos igualar las dos expresiones anteriores, y entonces:

$$\begin{aligned} -q \left( \frac{a-x}{D-a} \right) &= -q \left( \frac{x+a}{D+a} \right) \Rightarrow (a-x)(D+a) = (x+a)(D-a) \\ \Rightarrow aD + a^2 - (D+a)x &= (D-a)x + aD - a^2 \Rightarrow 2Dx = 2a^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{a^2}{D}} \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la expresión (1) (o (2)) seremos capaces de despejar  $q'$ :

$$q' = -q \left( \frac{a-x}{D-a} \right) \Rightarrow q' = -q \left( \frac{a - \frac{a^2}{D}}{D-a} \right) = -\frac{q}{D} \left( \frac{a(D-a)}{D-a} \right) \Rightarrow \boxed{q' = -\frac{a}{D}q}$$

Notamos que la carga  $q'$  es negativa, lo cual tiene sentido ya que la carga imagen tiene que tener signo contrario a la carga real para anular las componentes del campo generado por  $q$  (positivo) que son tangenciales a la esfera.

- b) Para encontrar la distribución superficial de carga recordamos la siguiente relación entre la densidad de carga superficial y el potencial en el borde del conductor:

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\text{borde}} \quad (3)$$

Donde  $n$  es la coordenada normal a la superficie (en nuestro caso  $n = r$ ). Entonces, necesitamos encontrar el potencial para un punto cualquiera del espacio, y luego usar este resultado en la expresión (3) para encontrar lo pedido.

El potencial en un punto cualquiera del espacio, desde el punto de vista del sistema con la carga imagen, estará dado por la suma del potencial que genera cada carga por separado, es decir:

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r})$$

Donde usamos el subíndice 1 para la carga real, y el subíndice 2 para la carga imagen. Si usamos la notación del dibujo anterior, tendremos que:

$$V_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1(\vec{r})} \quad ; \quad V_2(\vec{r}) = \frac{-\frac{a}{D}q}{4\pi\epsilon_0 r_2(\vec{r})}$$

Para encontrar las distancias  $r_1$  y  $r_2$  en función de las coordenadas del problema ( $r$ ,  $\phi$  y  $\theta$  en coordenadas esféricas) usaremos el teorema del coseno, con lo cual podemos observar que:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos(\theta)} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{D}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{D} \cos(\theta)}$$

Si usamos el valor de  $x$  encontrado en la parte (a), se tendrá que:

$$\Rightarrow r_1(r, \theta) = \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos(\theta)} \quad ; \quad r_2(r, \theta) = \sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{D}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{D} \cos(\theta)} \quad (4)$$

Entonces, tendremos que el potencial total en un punto  $\vec{r}$  del espacio será:

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1(r, \theta)} - \frac{\frac{a}{D}}{r_2(r, \theta)} \right)$$

Donde  $r_1(r, \theta)$  y  $r_2(r, \theta)$  son los que escribimos en (4). Calculamos la derivada haciendo uso de la regla de la cadena, entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_1^2(r, \theta)} \frac{\partial r_1}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\frac{a}{D}}{r_2^2(r, \theta)} \frac{\partial r_2}{\partial r}(r, \theta) \right)$$

Y entonces, al evaluar en el borde  $r = a$ , tendremos que:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_1^2(a, \theta)} \frac{\partial r_1}{\partial r}(a, \theta) + \frac{\frac{a}{D}}{r_2^2(a, \theta)} \frac{\partial r_2}{\partial r}(a, \theta) \right)$$

Calculamos la derivada de  $r_1$  y  $r_2$  con respecto al radio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial r} &= \frac{2r - 2D \cos(\theta)}{2\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos(\theta)}} \Rightarrow \frac{\partial r_1}{\partial r} = \frac{r - D \cos(\theta)}{r_1(r, \theta)} \Rightarrow \frac{\partial r_1}{\partial r}(a, \theta) = \frac{a - D \cos(\theta)}{r_1(a, \theta)} \\ \frac{\partial r_2}{\partial r} &= \frac{2r - 2\frac{a^2}{D} \cos(\theta)}{2\sqrt{r^2 + \left(\frac{a^2}{D}\right)^2 - 2r\frac{a^2}{D} \cos(\theta)}} \Rightarrow \frac{\partial r_2}{\partial r} = \frac{r - \frac{a^2}{D} \cos(\theta)}{r_2(r, \theta)} \Rightarrow \frac{\partial r_2}{\partial r}(a, \theta) = \frac{a - \frac{a^2}{D} \cos(\theta)}{r_2(a, \theta)} \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{a - D \cos(\theta)}{r_1^3(a, \theta)} + \frac{\frac{a}{D} \left( a - \frac{a^2}{D} \cos(\theta) \right)}{r_2^3(a, \theta)} \right) \quad (5)$$

Evaluamos  $r_1$  y  $r_2$  en  $r = a$  usando las expresiones encontradas en (4):

$$r_1(a, \theta) = \sqrt{a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta)} \quad ; \quad r_2(a, \theta) = \sqrt{a^2 + \left( \frac{a^2}{D} \right)^2 - 2a \frac{a^2}{D} \cos(\theta)}$$

Podemos desarrollar la expresión para  $r_2(a, \theta)$  factorizando lo que está dentro de la raíz por  $\frac{a^2}{D^2}$ :

$$\begin{aligned} r_2(a, \theta) &= \sqrt{a^2 + \left( \frac{a^2}{D} \right)^2 - 2a \frac{a^2}{D} \cos(\theta)} = \sqrt{\frac{a^2}{D^2} (D^2 + a^2 - 2aD)} \\ \Rightarrow r_1(a, \theta) &= \sqrt{a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta)} \quad ; \quad r_2(a, \theta) = \frac{a}{D} \sqrt{a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta)} \end{aligned}$$

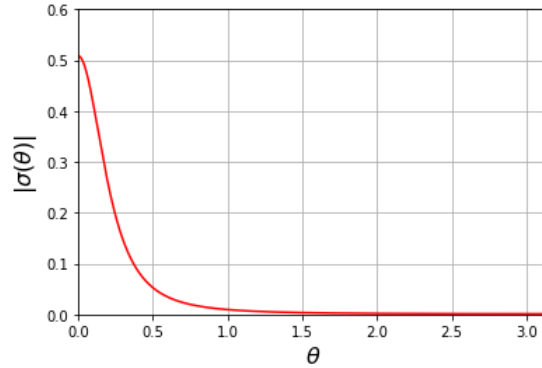
Entonces, reemplazando esto en la expresión (5), tendremos que:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{a - D \cos(\theta)}{(a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{a}{D} \left( a - \frac{a^2}{D} \cos(\theta) \right)}{\frac{a^3}{D^3} (a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{q(D^2 - a^2)}{4\pi\epsilon_0 a (a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, reemplazando en la expresión (3), obtenemos finalmente la densidad de carga en la superficie de nuestro conductor:

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = \frac{-q(D^2 - a^2)}{4\pi a (a^2 + D^2 - 2aD \cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}}$$

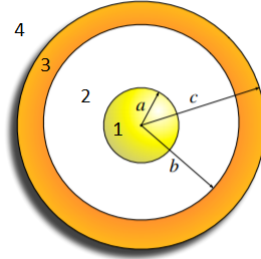
Si graficamos el valor absoluto de esta distribución en función del ángulo  $\theta$ , obtenemos lo siguiente:



Lo cual nos indica que la densidad de carga es más intensa en el hemisferio de la esfera que está más cerca de la carga real, lo cual tiene sentido.

**P2. Esfera y casquete conductores:**

Dividimos el espacio en cuatro zonas, las cuales enumeramos a continuación:



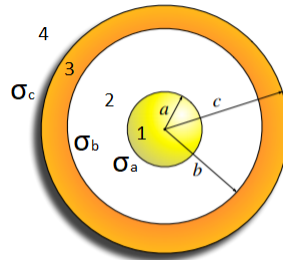
Conceptualmente debemos recordar que los conductores no pueden tener carga en su interior, lo cual significa dos cosas:

- El campo eléctrico  $\vec{E}$  dentro de un conductor es cero.
- La carga en un conductor se distribuye sobre su superficie.

Con el primer punto podemos determinar el campo eléctrico en las zonas 1 y 3 (que corresponden a  $0 < r < a$  y  $b < r < c$ , respectivamente), ya que son zonas del espacio donde hay materiales conductores, entonces:

$$\vec{E}_1(r) = 0 \quad ; \quad \vec{E}_3(r) = 0$$

Ahora, con el segundo punto sabemos que las superficies ubicadas en  $r = a$ ,  $r = b$  y  $r = c$  tienen una distribución de cargas en su superficie, a las cuales llamaremos  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  y  $\sigma_c$ , respectivamente, y que anotamos en el diagrama del problema para aclarar:



Ahora, si usamos ley de Gauss podemos calcular el campo eléctrico en las zonas 2 y 4. Partiendo por  $\vec{E}_2$ , usando ley de Gauss para una esfera de radio  $a < r < b$ , tendremos que:

$$\oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E_2(r) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

En este caso esfera de radio  $a < r < b$  sólo está encerrando la carga de la superficie de la esfera conductora de radio  $a$ , entonces, por definición de distribución de carga:

$$Q_{enc} = 4\pi a^2 \sigma_a$$

Entonces:

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_2(r) = \frac{4\pi a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2(r) = \frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (6)$$

Donde  $\sigma_a$  es (aún) desconocido. Veamos ahora cómo es el campo en la zona 4, el cual por ley de Gauss cumple, para una esfera de radio  $r > c$ :

$$\oint_S \vec{E}_4 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E_4(r) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

En este caso notemos que la carga encerrada no cambia, ya que el casquete esférico exterior está descargado, por lo tanto para cualquier radio  $r > a$ , la carga encerrada será siempre  $Q_{enc} = 4\pi a^2 \sigma_a$ , entonces:

$$\Rightarrow 4\pi r^2 E_4(r) = \frac{4\pi a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_4(r) = \frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (7)$$

Entonces, para resumir, hasta ahora sabemos que:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & ; \quad r < a \quad \text{ó} \quad b < r < c \\ \frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} & ; \quad a < r < b \quad \text{ó} \quad r > c \end{cases}$$

Para encontrar el valor de  $\sigma_a$  usamos que el potencial de la esfera es  $V_0$ , en particular,  $V(a) = V_0$ . Entonces, por definición de potencial:

$$V(r) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para nuestro caso, como usamos coordenadas esféricas,  $d\vec{l} = dr \hat{r}$ , entonces, para  $\vec{r} = a \hat{r}$  se tiene que:

$$V(a) = V_0 = - \int_{\infty}^a E(r) dr = \int_a^{\infty} E(r) dr = \int_0^a E_1(r) dr + \int_a^b E_2(r) dr + \int_b^c E_3(r) dr + \int_c^{\infty} E_4(r) dr$$

Como  $E_1(r) = E_3(r) = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_a^b \frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0 r^2} dr + \int_c^{\infty} \frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{a^2 \sigma_a}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \Rightarrow \sigma_a &= \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \end{aligned} \quad (8)$$

Con lo cual obtenemos la primera distribución de carga pedida. Ahora, usando esto en la expresión que teníamos para el campo eléctrico, tendremos que:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & ; \quad r < a \quad \text{ó} \quad b < r < c \\ \frac{V_0}{\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) r^2} \hat{r} & ; \quad a < r < b \quad \text{ó} \quad r > c \end{cases}$$

Ahora, el potencial para  $r < a$  (zona 1) es, por enunciado,  $V_0$ . Para calcular el potencial usamos la definición de éste en cada zona de nuestra configuración, recordando que  $d\vec{l} = dr\hat{r}$  y que  $E_1(r) = E_3(r) = 0$ , entonces:

$$V_2(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr = \int_r^b E_2(r) dr + \int_c^{\infty} E_4(r) dr$$

$$\Rightarrow V_2(r) = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \left[ \int_r^b \frac{dr}{r^2} + \int_c^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right] \Rightarrow V_2(r) = \frac{V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

Ahora para  $b < r < c$ :

$$V_3(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr = \int_c^{\infty} E_4(r) dr = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \int_c^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow V_3(r) = \frac{V_0}{c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

Finalmente para  $r > c$ :

$$V_4(r) = - \int_{\infty}^r E(r) dr = \int_r^{\infty} E_4(r) dr = \frac{V_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow V_4(r) = \frac{V_0}{r \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

Entonces, el potencial en el espacio está dado por:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & ; \quad r < a \\ \frac{V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} & ; \quad a < r < b \\ \frac{V_0}{c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} & ; \quad b < r < c \\ \frac{V_0}{r \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} & ; \quad r > c \end{cases}$$

Por último, si queremos obtener las densidades de carga  $\sigma_b$  y  $\sigma_c$  utilizamos la ley de Gauss a nuestro favor. Como sabemos que en la zona 3 el campo eléctrico es cero (por ser un conductor) entonces:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{0} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{enc} = 0$$

Entonces, la carga encerrada por una esfera de radio  $b < r < c$  es cero, y las cargas encerradas por esa esfera son la carga de la superficie de radio  $a$  y la carga de la superficie de radio  $b$ , es decir:

$$Q_{enc} = Q_a + Q_b = 0 \Rightarrow 4\pi a^2 \sigma_a + 4\pi b^2 \sigma_b = 0 \Rightarrow \sigma_b = -\frac{a^2}{b^2} \sigma_a$$

Entonces, reemplazando el resultado que encontramos para  $\sigma_a$  en (8), tendremos que:

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_b = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{b^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}}$$

Finalmente, como la carga del cascarón conductor externo es cero, se tiene que  $Q_b + Q_c = 0$ , así:

$$\Rightarrow 4\pi b^2 \sigma_b + 4\pi c^2 \sigma_c = 0 \Rightarrow \sigma_c = -\frac{b^2}{c^2} \sigma_b$$

Entonces, reemplazando lo que encontramos para  $\sigma_b$ , concluimos que:

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_c = \frac{\varepsilon_0 V_0}{c^2 \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}}$$