

FI2002-2 Electromagnetismo.**Profesor:** Marcel Clerc.**Auxiliares:** Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Pauta Auxiliar 16: Preparación examen.

03 de Agosto de 2020

P1. Caída libre y campo magnético:

- a) Partamos por entender cómo será el movimiento de la partícula cargada. De física newtoniana sabemos que en la zona sin campo la partícula describirá una línea recta en caída libre, y al llegar a la zona con campo lo hará con una velocidad $\vec{v}_0 = -\sqrt{2gh}\hat{y}$. Ahora, dado que al entrar a la zona con campo la partícula va con una velocidad, entonces por fuerza de Lorentz aparecerá una fuerza \vec{F}_0 tal que:

$$\vec{F}_0 = q\vec{v}_0 \times \vec{B} = qv_0B(-\hat{y}) \times (-\hat{z}) \Rightarrow \vec{F}_0 = qv_0B\hat{x}$$

Donde se usa $v_0 = \sqrt{2gh}$. Con esto notamos que la partícula comenzará a acelerar hacia la derecha, y entonces el movimiento general en la zona con campo es tal que la partícula se mueve en el plano XY con una velocidad $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$. En este movimiento general la fuerza de Lorentz en un instante arbitrario es $\vec{F}_e = q\vec{v} \times \vec{B}$, donde:

$$\vec{F}_e = qB[v_x\hat{x} \times (-\hat{z}) + v_y\hat{y} \times (-\hat{z})] = qB[v_x\hat{y} - v_y\hat{x}] \Rightarrow \vec{F}_e = -qBv_y\hat{x} + qBv_x\hat{y}$$

Como en la zona con campo la partícula comienza su movimiento acelerando hacia la derecha, $v_x > 0$, con lo cual aparece una fuerza positiva en \hat{y} que se opone al peso. Para encontrar la ecuación de movimiento usamos la segunda ley de Newton en cada eje con las aceleraciones a_x y a_y :

$$\begin{aligned} \boxed{\hat{x}} \quad ma_x &= -qBv_y \quad ; \quad \boxed{\hat{y}} \quad ma_y = qBv_x - mg \\ \Rightarrow \boxed{\hat{x}} \quad \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{qB}{m}v_y \quad ; \quad \boxed{\hat{y}} \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m}v_x - g \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales para v_x y v_y . Para resolver este sistema derivamos con respecto al tiempo alguna de las EDOs, y reemplazamos el resultado en la otra. Derivando la ecuación correspondiente a \hat{y} :

$$\Rightarrow \frac{d^2v_y}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_x}{dt}$$

Reemplazando la expresión correspondiente a \hat{x} :

$$\Rightarrow \frac{d^2v_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y \Rightarrow v_y(t) = C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Como condición inicial tenemos que $v_y(0) = -v_0$, entonces $C_1 = -v_0$. Por otro lado a partir de la expresión correspondiente a \hat{y} podemos despejar $v_x(t)$:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{m}{qB} \left(\frac{dv_y}{dt} + g \right) = \frac{m}{qB} \left(\frac{v_0qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{C_2qB}{m} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + g \right) \\ v_x(t) &= v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mg}{qB} \end{aligned}$$

Como la partícula estaba en caída libre, entonces inicialmente sólo se mueve en dirección vertical, con lo cual $v_x(0) = 0$. Imponiendo esta condición inicial:

$$v_x(0) = 0 \Rightarrow C_2 + \frac{mg}{qB} = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{mg}{qB}$$

Entonces, reemplazando en las expresiones para $v_x(t)$ y $v_y(t)$:

$$\Rightarrow v_x(t) = v_0 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mg}{qB} \quad ; \quad v_y(t) = -v_0 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

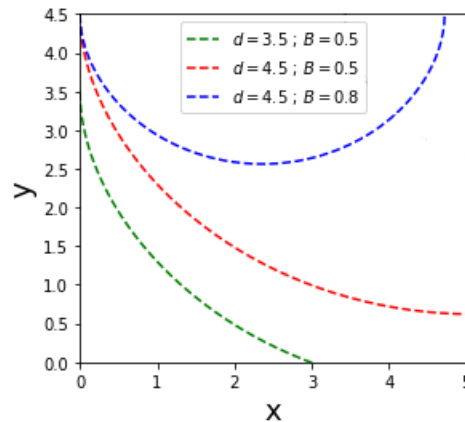
Por último, para obtener la trayectoria de la partícula integramos estas expresiones. Partiendo por $x(t)$, podemos usar $x(0) = 0$, y entonces:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t v_x(t) dt \Rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t v_x(t) dt \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{v_0 m}{qB} \left[-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \right]_0^t - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left[\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \right]_0^t + \frac{mg}{qB} t \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{\sqrt{2g\hbar m}}{qB} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \right) - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{mg}{qB} t \end{aligned}$$

Ahora integramos $v_y(t)$ para obtener $y(t)$, usando como condición inicial que $y(0) = d$, y así:

$$\begin{aligned} v_y(t) &= \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_{y(0)}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y(t) dt \Rightarrow y(t) - y(0) = \int_0^t v_y(t) dt \\ \Rightarrow y(t) - d &= -\frac{v_0 m}{qB} \left[\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \right]_0^t - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left[-\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \right]_0^t \\ \Rightarrow y(t) &= -\frac{\sqrt{2g\hbar m}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{m^2 g}{q^2 B^2} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \right) + d \end{aligned}$$

Al graficar x v/s y obtenemos la trayectoria de la partícula en la zona con campo:



Podemos notar que la trayectoria se curva por la aparición de las fuerzas en el eje horizontal y vertical, y que para cierta combinación de parámetros la partícula no toca el piso.

- b) Si la gravedad “desaparece” entonces usamos $g = 0$ en todos los términos de las expresiones obtenidas en la parte anterior, excepto en $\sqrt{2gh}$, el cual usamos como v_0 . En ese caso tenemos que:

$$x(t) = \frac{v_0 m}{qB} - \frac{v_0 m}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad ; \quad y(t) = -\frac{v_0 m}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + d$$

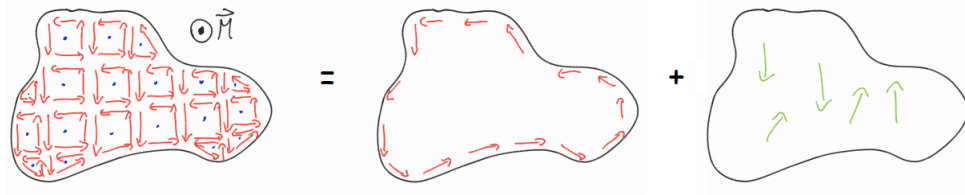
Podemos darnos cuenta de que el movimiento en ambos ejes es oscilatorio, donde la oscilación tiene la misma amplitud y frecuencia en ambos ejes. Esto concuerda con lo que queremos demostrar (que la curva descrita es una circunferencia). Para llegar a la ecuación de una circunferencia notemos que:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{v_0 m}{qB}\right)^2 + (y - d)^2 &= \left(-\frac{v_0 m}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)^2 + \left(-\frac{v_0 m}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)^2 \\ \Rightarrow \left(x - \frac{v_0 m}{qB}\right)^2 + (y - d)^2 &= \left(\frac{v_0 m}{qB}\right)^2 \left[\cos^2\left(\frac{qB}{m}t\right) + \sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)\right] \\ &\Rightarrow \left(x - \frac{v_0 m}{qB}\right)^2 + (y - d)^2 = \left(\frac{v_0 m}{qB}\right)^2 \end{aligned}$$

Entonces, notamos que la partícula describe un movimiento circular de radio $r = \frac{v_0 m}{qB}$ y centro $(x_c, y_c) = \left(\frac{v_0 m}{qB}, d\right)$.

P2. Magnetización:

- a) La magnetización corresponde a una propiedad de los materiales que caracteriza cómo estos perciben y producen campos magnéticos. La magnetización aparece ya que cada electrón en nuestro material se comporta como un pequeño imán (dipolo magnético) el cual, tal como vimos en la P1 de la clase auxiliar 12, puede modelarse como un loop de corriente¹. En condiciones especiales estos loops no se cancelan del todo, generando lo que se conocen como *corrientes de magnetización*. El fenómeno se ilustra en el siguiente dibujo, donde los puntos azules representan las partículas que componen al material magnetizado (en este caso la magnetización sale de la pantalla) y que se modelan como loops de corriente:



Notamos que las componentes de la corriente que están justo en la superficie del material crean una corriente superficial caracterizada por una densidad superficial de corriente \vec{K}_b , mientras que las componentes en el interior pueden o no cancelarse de forma exacta, y cuando no lo hacen aparecen corrientes en el volumen (flechas verdes) caracterizadas por una densidad volumétrica de corriente \vec{J}_b . Estas densidades de corriente pueden calcularse en función de la magnetización de la siguiente forma:

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} \quad ; \quad \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$$

Donde \hat{n} es el vector unitario perpendicular a la superficie del material. Para el caso de nuestro ejercicio se tiene $\vec{M} = M_0 \hat{x}$, y como estamos trabajando con un cilindro, en coordenadas cilíndricas se tendrá que $\hat{n} = \hat{r}$ (vector normal a la superficie del cilindro infinito). Escribiendo \hat{r} en coordenadas cartesianas, y desarrollando el producto cruz, seremos capaces de encontrar \vec{K}_b :

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{x} \times (\cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y}) = M_0 \sin(\theta) (\hat{x} \times \hat{y}) \Rightarrow \boxed{\vec{K}_b = M_0 \sin(\theta) \hat{z}}$$

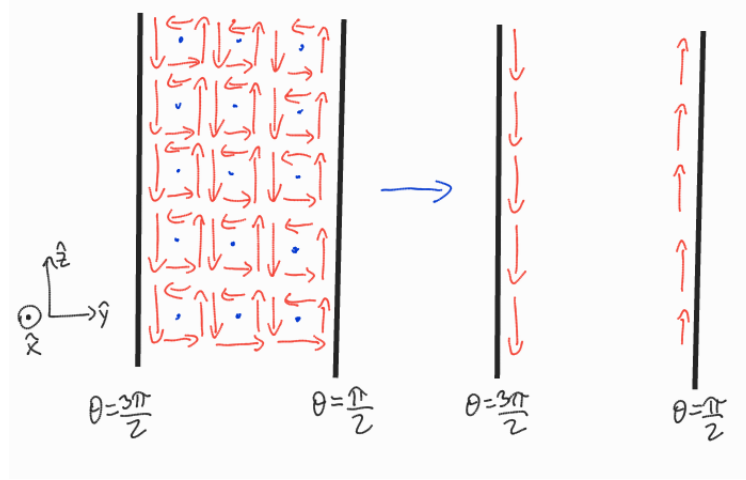
Por otro lado, la densidad volumétrica de corriente está dada por el rotor de la magnetización \vec{M} , sin embargo, como esta es uniforme, entonces al calcular su rotor estamos derivando una constante, de tal forma que:

$$\nabla \times \vec{M} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{J}_b = \vec{0}}$$

Analicemos estos resultados. Primero, como la magnetización está en \hat{x} , entonces al hacer un corte longitudinal en el cilindro (tal que se muestra el plano YZ) los loops que representan a los pequeños dipolos magnéticos que conforman el material se verán como en el dibujo de la página siguiente. Notamos que la corriente resultante en los bordes es paralela a la superficie, es decir, va en la dirección \hat{z} , mientras que el sentido de la corriente concuerda con lo encontrado para \vec{K}_b (las paredes derecha e izquierda están caracterizadas por $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$, respectivamente).

¹Como los electrones están orbitando al átomo, hay una corriente asociada, pero en general se cancela con algún otro electrón orbitando en sentido contrario. Sin embargo el electrón también tiene un momento angular intrínseco (spin) que explica el hecho de que cada electrón en sí es también un pequeño imán.

Finalmente, como la magnetización es uniforme, las flechas asociadas a los loops de cada partícula del material son del mismo tamaño, con lo cual las flechas en el volumen se cancelan de forma exacta con sus vecinas, lo que explica que no existan corrientes volumétricas².



- b) Es importante entender que las corrientes que se inducen por magnetización generan campos magnéticos, pero la forma en que calculamos el campo a partir de estas corrientes no puede ser cualquiera. Separaremos la corriente en dos grupos según su origen:

- i) **Corrientes libres**: Corresponden a aquellas que son inducidas por un transporte real de cargas, por ejemplo, al conectar una batería, y están asociadas a densidades \vec{K}_f y \vec{J}_f .
- ii) **Corrientes ligadas**³: Corresponden a aquellas que son inducidas por la magnetización del material, es decir, las corrientes asociadas a \vec{K}_b y \vec{J}_b .

En ese sentido, se tienen las siguientes igualdades:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f \quad \text{ó} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S}$$

Es importante notar que la ley de Ampère asociada al campo \vec{H} sólo es válida si usamos la densidad de corriente libre, y por lo tanto **jamás debemos usar la ley de Ampère calculando la corriente a partir de densidades de corriente ligada**, sino que debemos aplicar directamente ley de Biot-Savart para calcular el campo generado por estas corrientes ligadas.

En este caso sólo tenemos densidad superficial de corriente \vec{K}_b , y recordando la ley de Biot-Savart para estas densidades se tiene que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$

Como queremos el campo en cualquier punto del eje de nuestro cilindro, entonces $\vec{r} = h\hat{z}$, donde h es la altura a la cual calculamos el campo. Por otro lado, $\vec{r}' = R\hat{r} + z\hat{z}$, y como estamos en el manto de un cilindro con radio constante, entonces $dS = R d\theta dz$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in (-\infty, \infty)$.

²Este resultado es general; si la magnetización es uniforme, no hay densidad de corriente volumétrica.

³Se dicen “ligadas” porque corresponden a corrientes generadas por cargas que realmente no se desplazan de su átomo de origen (permanecen ligadas), pero cuyo efecto colectivo es una corriente.

Entonces, reemplazando en la integral y desarrollando:

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{M_0 \sin(\theta) \hat{z} \times (-R\hat{r} + (h-z)\hat{z})}{(R^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} R d\theta dz$$

Primero, con el producto cruz desaparece el término del numerador que está en \hat{z} , entonces:

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) (\hat{z} \times \hat{r})}{(R^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dz = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) \hat{\theta}}{(R^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dz$$

Notamos que el numerador sólo depende de θ , mientras que el denominador sólo depende de z , entonces podemos separar las integrales:

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \hat{\theta} d\theta \right)$$

Para la integral en z hacemos el cambio de variable $u = h - z$, con lo cual $dz = -du$ y los límites se relacionan como:

$$z \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \quad ; \quad z \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow -\infty$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{du}{(R^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(R^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{R^2}$$

Por otro lado, para integrar con respecto al ángulo debemos escribir $\hat{\theta}$ en la base cartesiana:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \hat{\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin(\theta) (-\sin(\theta) \hat{x} + \cos(\theta) \hat{y}) d\theta = -\hat{x} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta + \hat{y} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \hat{\theta} d\theta = -\pi \hat{x} \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando los resultados de las integrales en la expresión para \vec{B} , tendremos que:

$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi} \left(\frac{2}{R^2} \right) (-\pi \hat{x}) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2} \hat{x}}$$

Con lo cual se obtiene el campo magnético en el eje del cilindro magnetizado.