

# ELECTROMAGNETISMO

notas de clases a distancia

Otoño 2021

Francisco Brieva

Departamento de Física  
FCFM - Universidad de Chile

# CONTENIDO

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

1. ELECTROSTÁTICA
2. CAMPOS ELÉCTRICOS EN MATERIALES  
(Conductores y Dieléctricos)
3. CORRIENTES ESTACIONARIAS
4. MAGNETOSTÁTICA
5. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA
6. CAMPOS MAGNÉTICOS EN MATERIALES
7. ECUACIONES DE MAXWELL -  
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

**ELECTROMAGNETISMO**  
**FI2002-2**

**BIBLIOGRAFÍA**

**APUNTES (en U-cursos)**

- Apunte de Electromagnetismo, D. Sapone, Departamento de Física, versión 2020

**TEXTOS (Incluidos en Programa del Curso)**

- “Electromagnetismo”, Patricio Cordero, Editorial Universitaria (2016)
- “Introduction to electrodynamics”, David Griffith, 4a edición, Cambridge University Press (2017)

**OTROS TEXTOS (interesantes)**

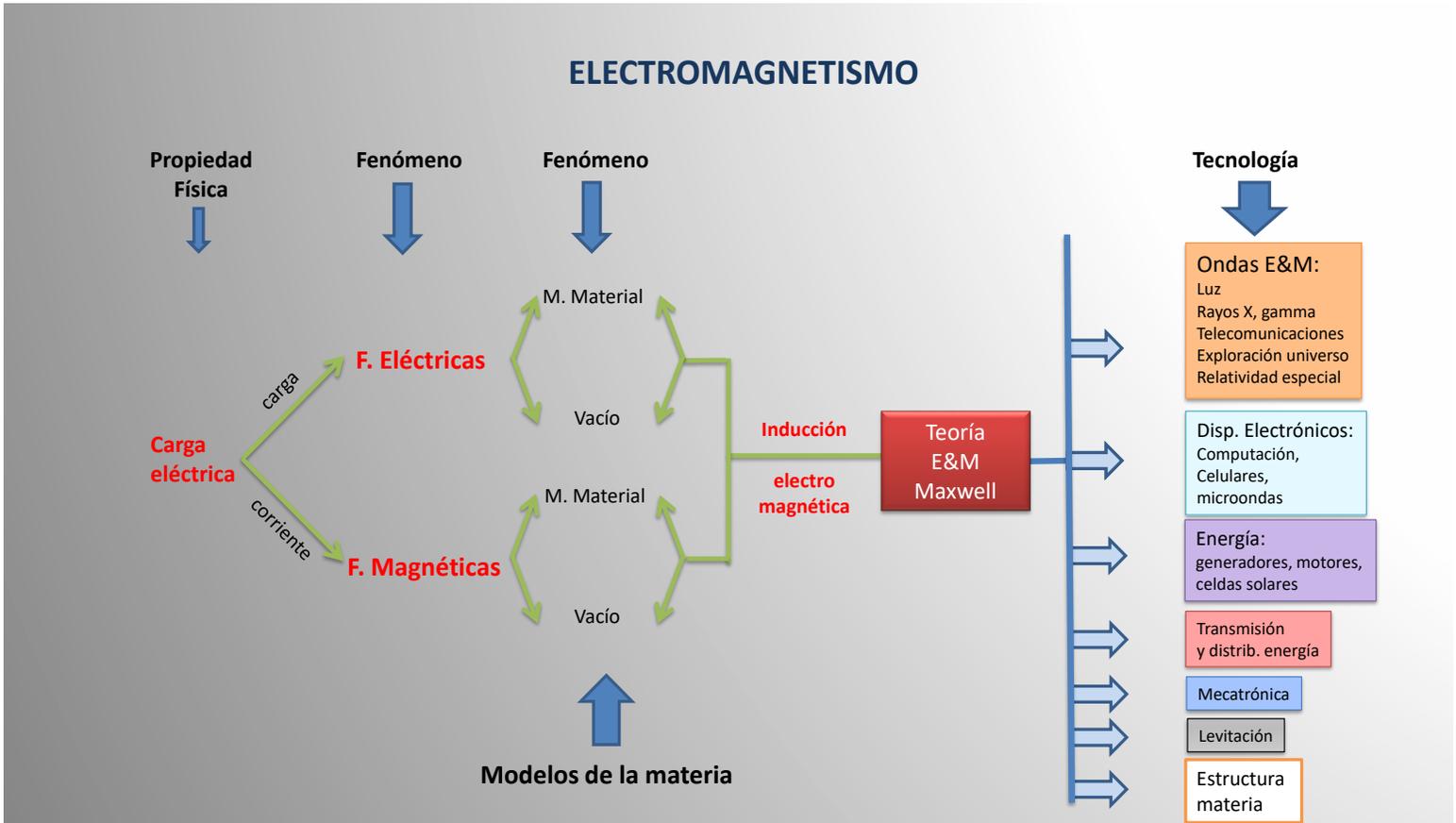
- “Electromagnetism”, Pollack G. y Stump D. - Wiley (2002)
- “Electricity and Magnetism”, Purcell E.M., Morin D.J. - Cambridge University Press (2013)
- “Fundamentos de la teoría electromagnética”, J.R. Ritz, F.J. Milford y W. Christy (1996)
- “Electromagnetic Fields and Waves”, Paul Lorrain, Dale R. Corson, François Lorrain (3ra edición 1987)
- “Fundamentos de la teoría electromagnética”, J.R. Ritz, F.J. Milford y W. Christy (1996)
- “The Feynman Lectures on Physics, Vol. II: The New Millennium Edition: Mainly Electromagnetism and Matter”, Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands (2012, 1a edición 1964)
- “Electricity and Magnetism”, Berkeley Physics Course Vol 2, Edward M. Purcell (2a edición, 2011)

**PROBLEMAS (formato Apuntes, en U-cursos)**

- Problemas propuestos y resueltos de Electromagnetismo, Rodrigo Chi (2016)

# INTRODUCCIÓN

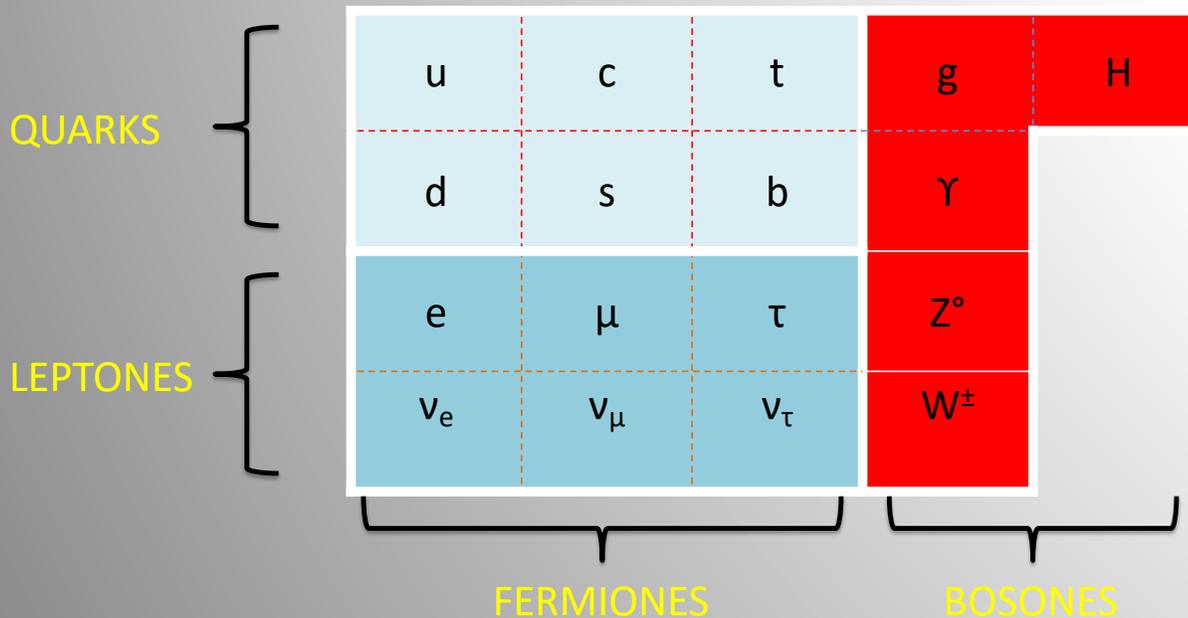
# Del fenómeno a su impacto



# La esencia: los componentes fundamentales

## ESTRUCTURA DE LA MATERIA

- Modelo Estándar



# Construyendo la materia

“ensalada”



FERMIONES

- Hacen la materia observada
- Propiedades (masa, carga, spin, .... )
- Son 12
- Quarks vienen en pares
  - $u, c, t$  ... carga eléctrica  $2/3 |e|$
  - $d, s, b$  ... carga eléctrica  $-1/3 |e|$
- Leptones:  $e, \mu, \tau$  .... c. eléct.  $- |e|$



BOSONES

- Intermediador interac. fundamentales
- Gluón ..... Interacciones fuertes
- Fotón ..... Interacción electromagnética
- $W^\pm, Z^0$  .... Interacciones débiles
- H (Higgs) .....

# Propiedades asociadas a la carga eléctrica

## propiedades

- Referencia

- Carga eléctrica del electrón  $q_e = - |e|$

- $|e| = 1.6 \times 10^{-19}$  [MKS]

- Quarks no aparecen libres en la naturaleza.

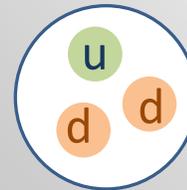
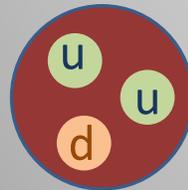
- Se combinan formando HADRONES: Proton {u,u,d} Neutron {u,d,d}

Carga eléctrica

+ |e|

0

proton

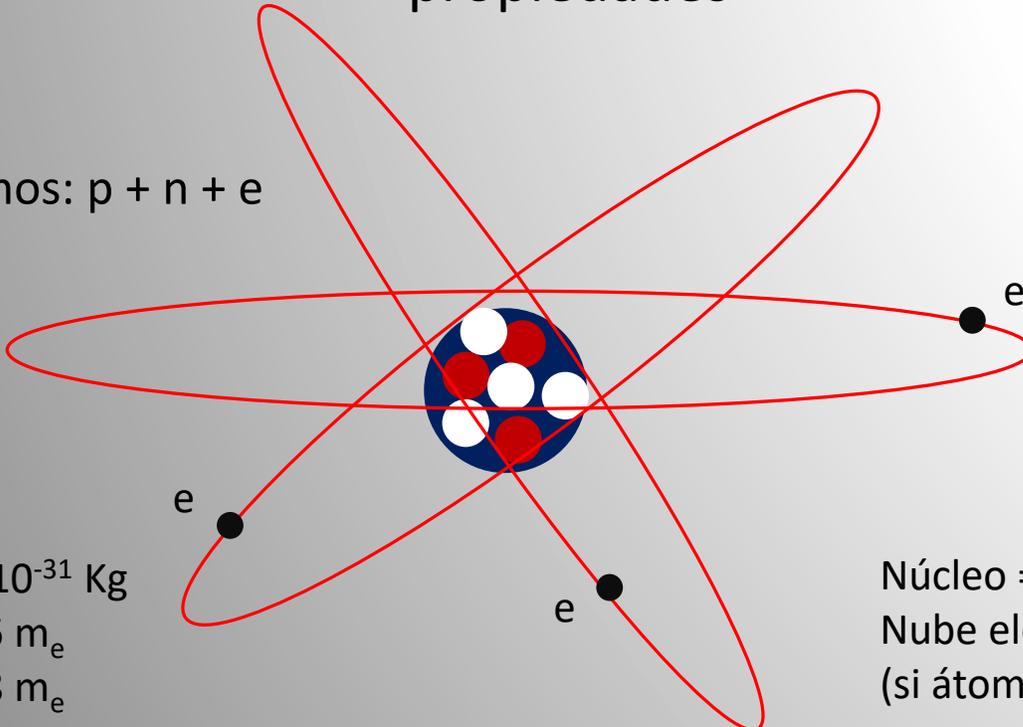


neutron

# Estructuras más complejas

propiedades

Átomos:  $p + n + e$



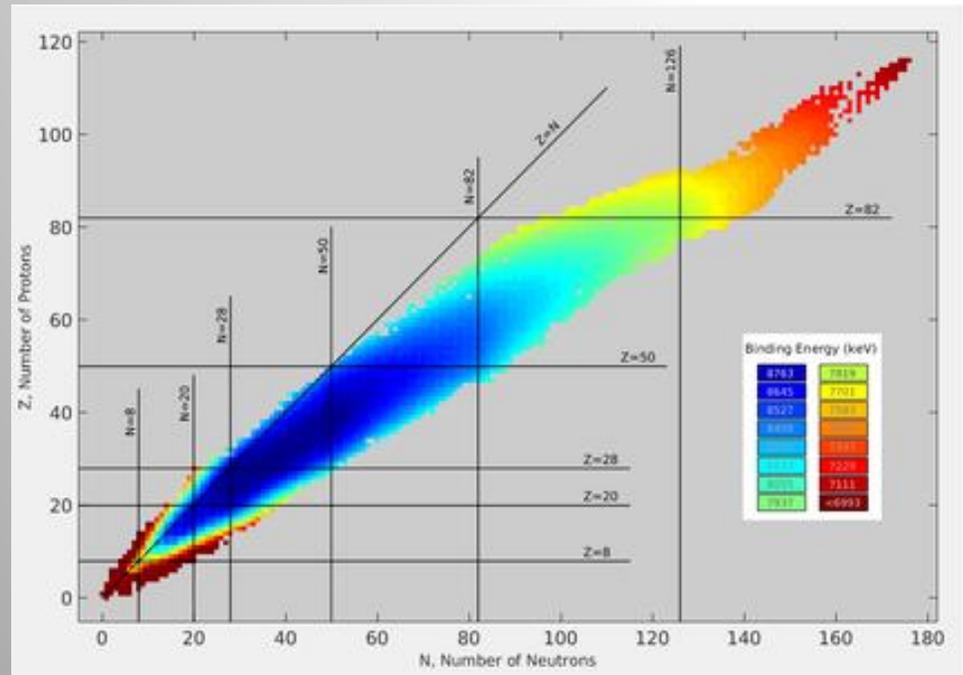
$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$   
 $m_p = 1836 m_e$   
 $m_n = 1838 m_e$

Núcleo =  $Z |e|$   
 Nube electrones =  $-Z |e|$   
 (si átomo es neutro)

# Fenómeno electromagnético define a la naturaleza, como la conocemos

- Valle de estabilidad
- Núcleos estables son finitos

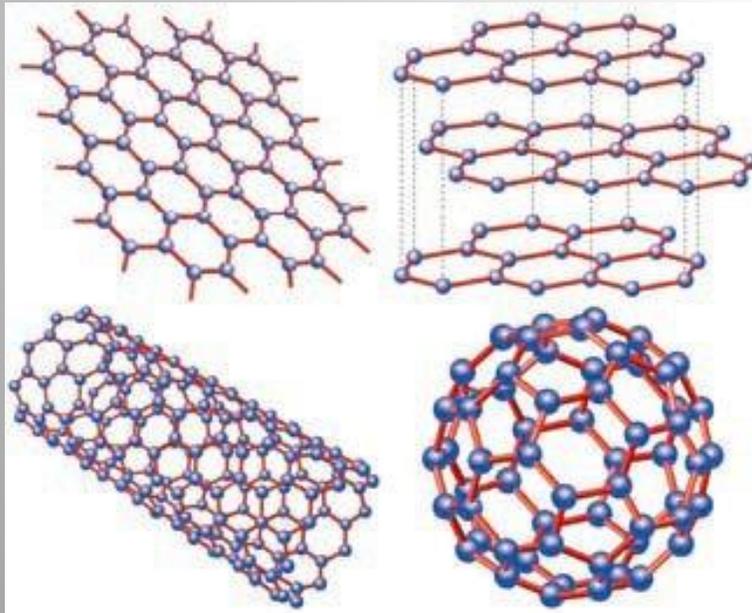
## Tabla de Núcleos



# Y permite formar estructuras materiales novedosas

## Moléculas

Grafeno



# Nuestro punto de partida: una mirada macroscópica

## Hechos Experimentales

- La carga eléctrica total se conserva en un sistema cerrado.
  - Puede redistribuirse o combinarse de maneras diferentes, pero la carga total se mantiene constante

$$Q \text{ neta} = \text{constante}$$

- La carga eléctrica está cuantizada.
  - Macroscópicamente,  $|Q| = N |e|$ ,  $N > 0$  ( $N \rightarrow \infty$ )
  - Hipótesis de trabajo:
    - Considerar la carga como una variable continua, descripción macroscópicamente adecuada por la gran cantidad de cargas electrónicas envueltas
    - Consecuencia:  
introducir la idea de distribuciones continuas de carga eléctrica

# ELECTROSTÁTICA

# ELECTROSTATICA (en el vacío)

Se construye sobre una propiedad de la materia:  
carga eléctrica

Naturaleza se organiza usando ciertas partículas fundamentales, cuyas propiedades determinan los fenómenos que en ella ocurren.

PARTICULAS ELEMENTALES:

quarks (6)	u, d, c, s, t, b
leptones (6)	e, $\mu$ , $\tau$ , $\nu_e$ , $\nu_\mu$ , $\nu_\tau$

+ PARTICULAS QUE INTERMEDIAN LA INTERACCION (g,  $\gamma$ , H,  $Z^0$ ,  $W^\pm$ )

dan forma a la materia en sus diversas expresiones.

## CARACTERISTICAS:

Partícula elemental  $\equiv$  { masa, carga eléctrica, spin, ... }

↙  
Gravitación

↓  
Electro  
magnetismo

## CARGA ELÉCTRICA:

- \* La mínima cantidad de carga eléctrica para una partícula libre en la naturaleza corresponde a la carga eléctrica del electrón

$$q_e = -|e| \quad |e| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ [C]}$$

La carga de cualquier otro sistema es, en magnitud,  $N$  veces  $|e|$

$$|Q| = N|e|$$

$N \rightarrow \infty$  para objetos macroscópicos

$\Rightarrow |Q|$  se maneja como una variable continua

- \* La propiedad carga eléctrica aparece en 2 formas o estados que se identifican como carga positiva o carga negativa

$$\Rightarrow \text{electrón } q_e = -|e|$$

$$\text{proton } q_p = +|e|$$

\* CARGA NETA (de un cuerpo u objeto)

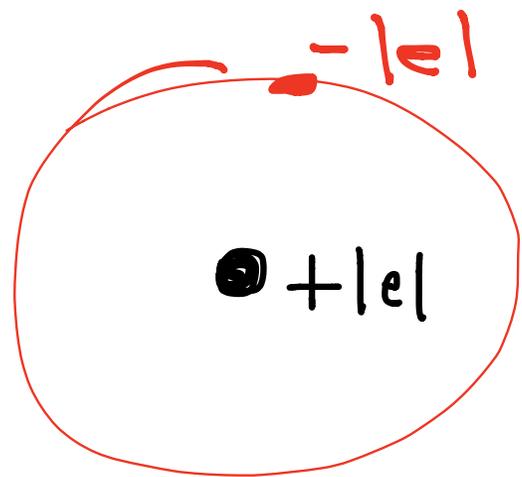
$$Q_{\text{neto}} = \sum_i q_i \quad \rightarrow \text{constante si est\u00e1 aislado}$$

gran mayor\u00eda de objetos - cuerpos

$$Q_{\text{neto}} = 0$$

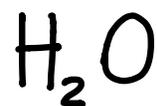
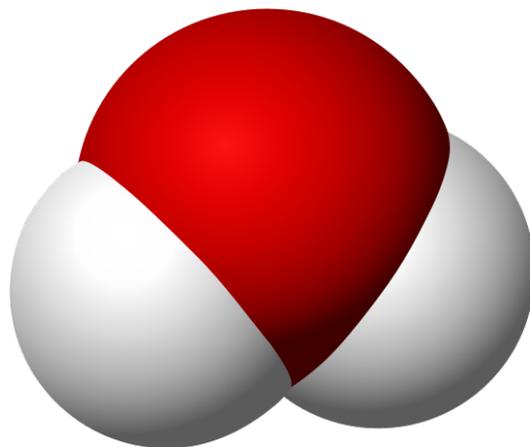
EJEMPLO:

Pensar en \u00e1tomos estables



Al acercarse,

$$Q_{\text{neto}} = 0$$

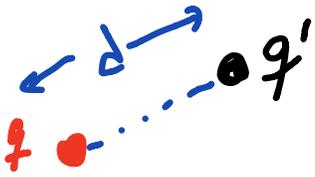


# LEY DE COULOMB

Establece la interacción básica entre 2 partículas puntuales, de cargas  $q$  y  $q'$

EXPERIMENTO:

$$\|\vec{F}\| \sim \frac{qq'}{d^2}$$



$\vec{F}$  atractiva cargas  $\neq$  signo  
 $\vec{F}$  repulsiva cargas  $=$  signo

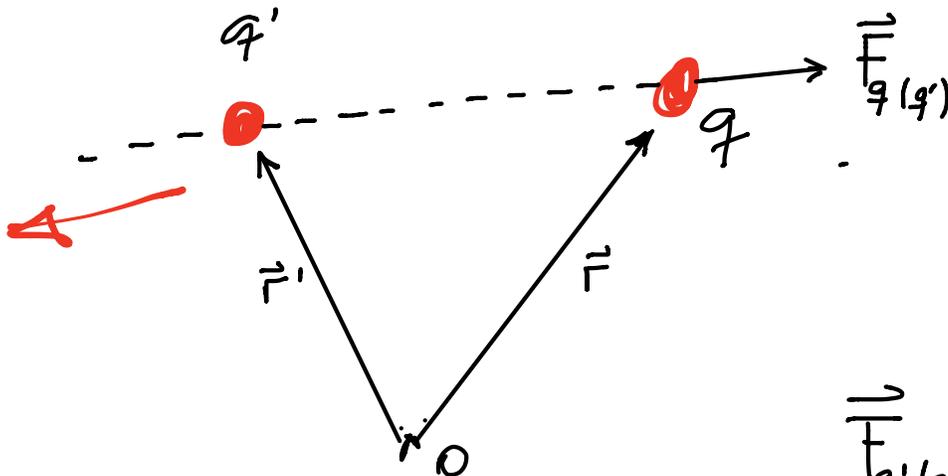
FORMALMENTE:

$$\vec{F}_{q(q')} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{qq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

$[q] = \text{Coulomb} = C$

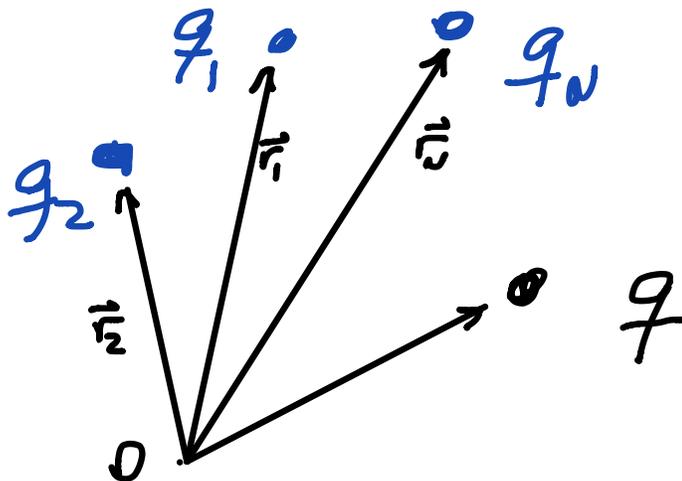
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \left[ \frac{C^2}{Nm^2} \right]$$

permitividad del vacío



$$\vec{F}_{q'(q)} = -\vec{F}_{q(q')}$$

# PRINCIPIO DE SUPERPOSICION



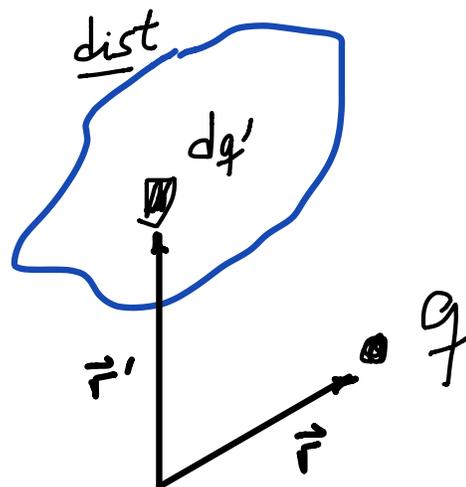
$$\vec{F}_{q \{q_1, q_2, \dots, q_N\}} = \vec{F}_{q(q_1)} + \vec{F}_{q(q_2)} + \dots + \vec{F}_{q(q_N)}$$

$$\vec{F}_{q \{ \}} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \sum_{i=1}^N \frac{q q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

## GENERALIZACION

Fuerza sobre carga  $q$  producida por una distribución continua de carga,

$$\vec{F}_q = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \int_{\text{dist}} \frac{q dq'(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} (\vec{r} - \vec{r}') .$$



$dq'(\vec{r}')$  corresponde a un elemento diferencial de carga contenida en una distribución de carga

distribución  $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{ll} \lambda \text{ (lineal)} & \text{carga/longitud} \\ \sigma \text{ (superficial)} & \text{carga/superf.} \\ \rho \text{ (volumétrica)} & \text{carga/vol} \end{array} \right.$

Significa:

$$\bullet \quad dq'(\vec{r}') \rightarrow \lambda(\vec{r}') dl' \rightarrow \sigma(\vec{r}') dS' \rightarrow \rho(\vec{r}') dV'$$

## PROPIEDADES $\vec{F}$ Coulomb

- satisface ppo acción y reacción
- es conservativa!

$$\text{Verificar } \nabla \times \vec{F}_q = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\oint_C \vec{F}_q \cdot d\vec{r} = 0}}$$

## Ejemplo

Estime la magnitud de la  $\vec{F}$  eléctrica con respecto a la  $\vec{F}$  gravitacional cuando un protón y un electrón interactúan

Para partículas separadas una distancia  $r$

$$\frac{\|\vec{F}_{elec}\|}{\|\vec{F}_{grav}\|} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p q_e}{r^2}}{G \frac{m_p m_e}{r^2}}$$
$$= \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \right) \frac{q_p q_e}{m_p m_e} \sim 10^{39}$$

$G \equiv$  constante gravitación universal

$$\text{Datos: } q_p = q_e = |e| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_p = 1838 m_e$$

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{Kg}^2}$$

## EJEMPLO:

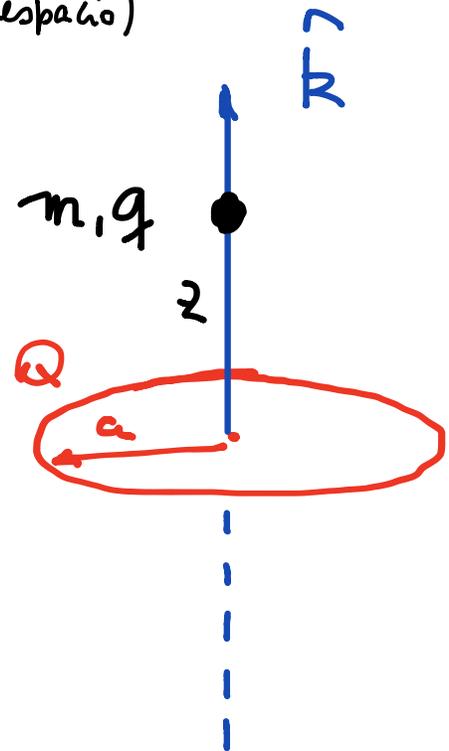
Coulomb nos permite estudiar la dinámica de partículas cargadas en presencia de un objeto (suponemos) estático y cargado.

Problema:

Movimiento de partícula  $(m, q)$  sobre el eje de simetría de un aro de radio  $a$  y carga total  $Q$  (fijo en el espacio) uniformemente distribuida

DINAMICA:

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$



Condiciones iniciales

$$\vec{r}(0) = z_0 \hat{k} \quad \dot{\vec{r}}(0) = 0$$

Desafío: calcular  $\vec{F}$  ?

i) aro tiene una densidad de carga lineal  $\lambda$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a} \quad (\text{uniformemente distrib})$$

ii) un elemento de carga  $dq'$  produce fuerza eléctrica sobre  $q$

$$d\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

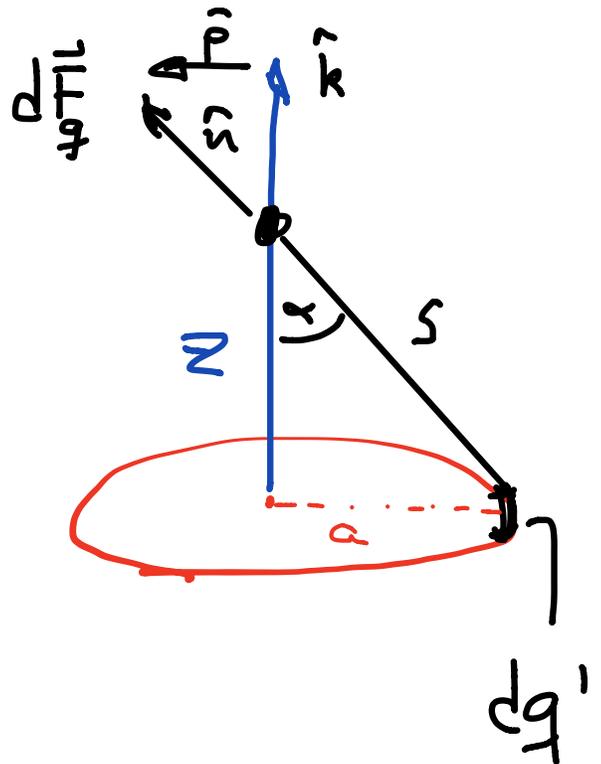
$$dq' = \lambda dl = \lambda a d\theta$$

$$\|\vec{r}-\vec{r}'\| = s = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \equiv \hat{n}$$

$$\hat{n} = \cos\alpha \hat{k} + \sin\alpha \hat{\rho}$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{s}$$



Entonces: 
$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_0} \frac{q \lambda a d\theta}{s^2} \hat{n}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \lambda a \int_0^{2\pi} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\theta \hat{k}$$

$$\vec{F}_q = F(z) \hat{k} \quad F(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q Q z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Si  $z > 0$   $\left\{ \begin{array}{l} F > 0 \text{ para } q, Q = \text{ligno} \\ F < 0 \text{ para } q, Q \neq \text{ligno} \end{array} \right.$

¿Qué se aprende?

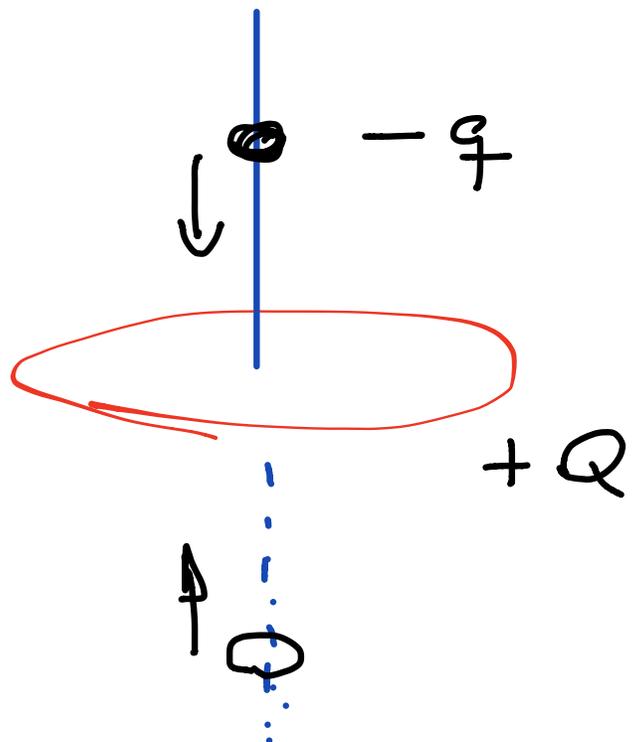
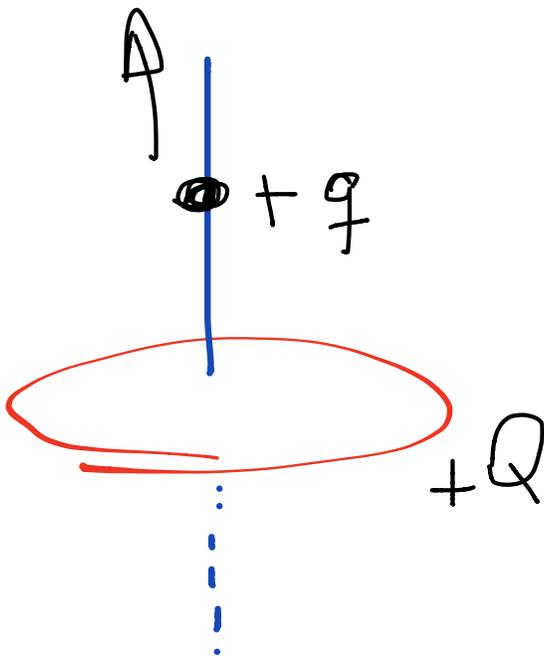
$$a) F(z \rightarrow \infty) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{z^2}$$

b) movimiento según eje  $\hat{k}$

$$m\ddot{z} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon} \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

signos = s : partícula se escapa

signos  $\neq$  s : partícula oscila entorno al aro



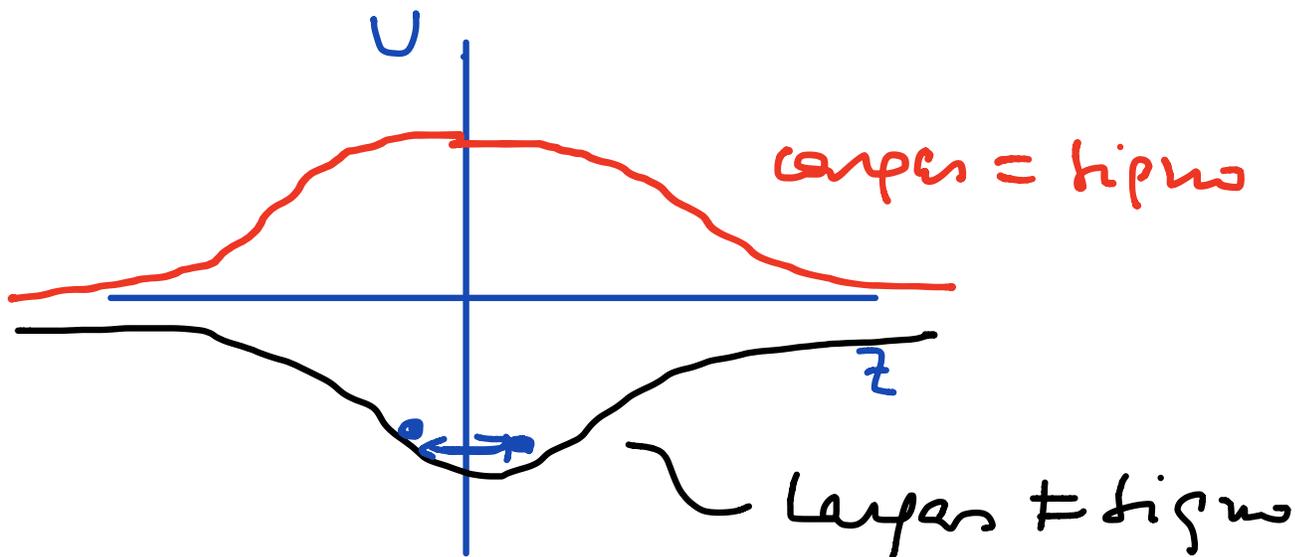
c) La  $\vec{F}$  es conservativa  $\rightarrow$  ¿Cuál es la energía potencial?

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \hookrightarrow ?$$

Escribe ecuación con conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + U(z) = \bar{E}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(z^2+a^2)^{1/2}}$$



Ver la frecuencia de oscilación para movimiento cerca del plano del aro

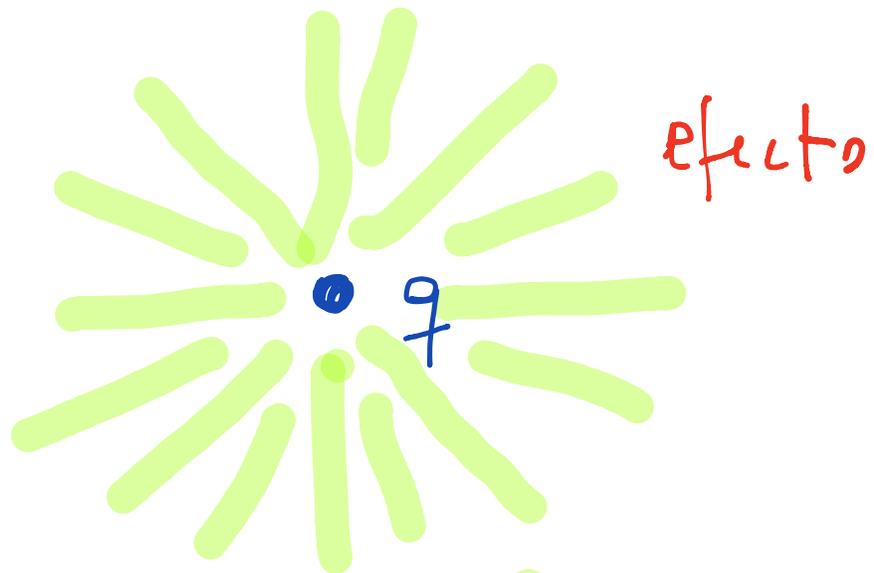
$$\omega = \left[ \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 m a^3} \right]^{1/2} \quad \text{curvas} \neq \text{signos}$$

# CAMPO ELECTRICO

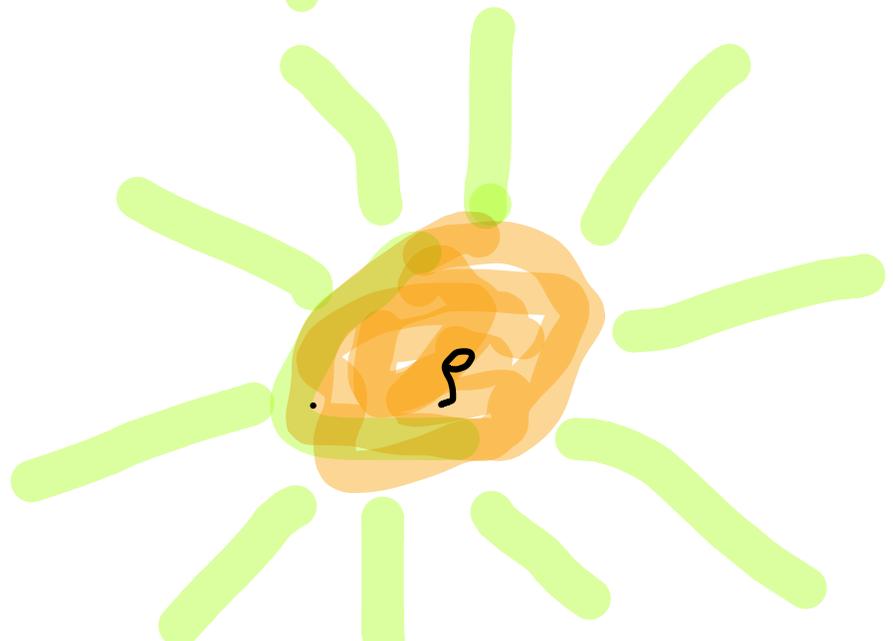
Asociado a la existencia de la carga eléctrica, identificamos un efecto en todo el espacio alrededor de la carga o distribución de carga eléctrica, que llamamos el campo eléctrico que la carga produce.

Si la fuente (carga) desaparece  $\rightarrow$  el efecto que produce también

Ejemplo



Ejemplo



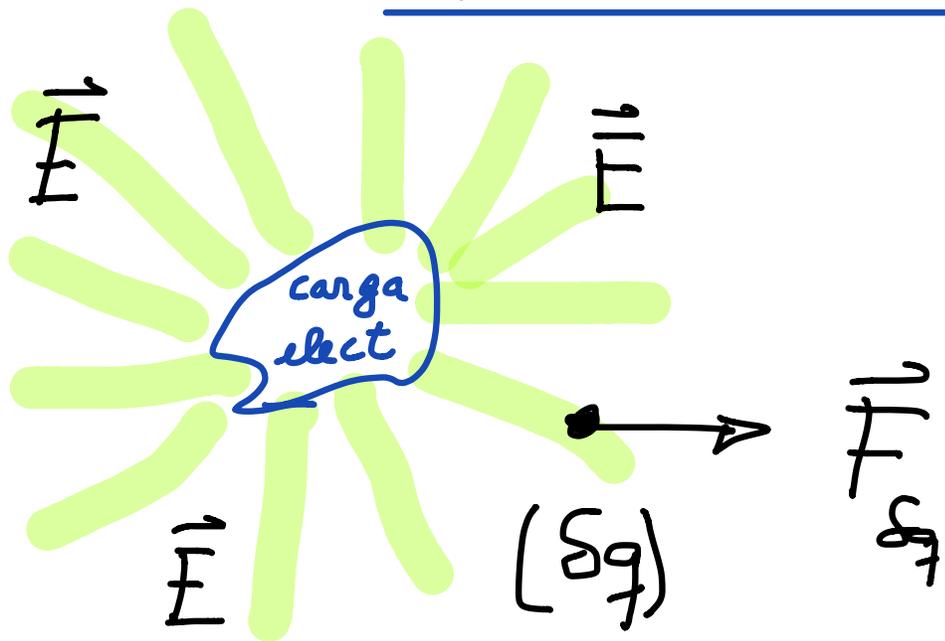
El efecto que produce la presencia de la carga eléctrica no es detectable  $\rightarrow$

Sin embargo, si colocamos un objeto cargado en la zona del efecto o **campo eléctrico**, sobre el objeto se ejerce una fuerza (que si es medible: objeto se mueve).

Llamando  $\vec{E}(\vec{r}) \equiv$  Campo eléctrico que produce la carga fuente en pto del espacio  $\vec{r}$

y  $(\delta q)$  una carga eléctrica infinitesimal en presencia de  $\vec{E} \Rightarrow$

$$\underline{\vec{F}_{\delta q}(\vec{r}) = (\delta q) \vec{E}(\vec{r})}$$

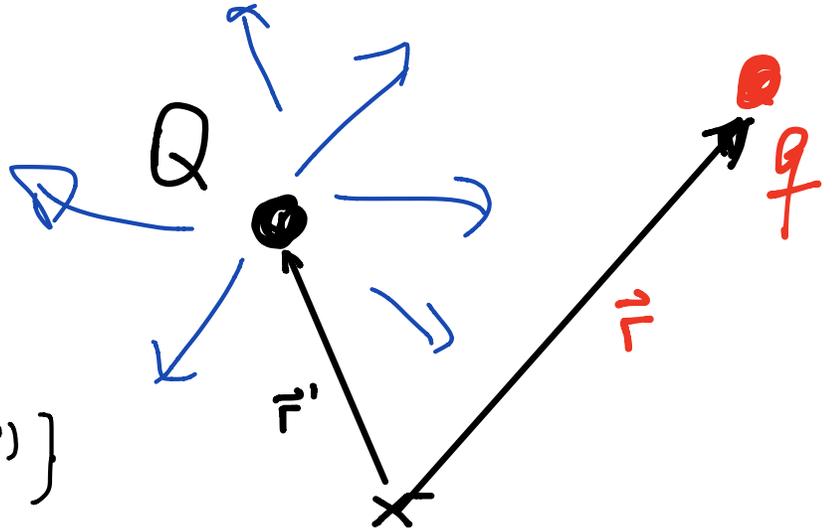


pensar  
a un copo  
grav.

DEFINICION:

$$\vec{E} =: \lim_{\delta q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{\delta q}}{\delta q} \quad \left[ \frac{N}{C} \right]$$

## Campo Eléctrico - 1 carga puntual $Q$



$$\vec{F}_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

$$= \{q\} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \right\}$$

$$\Downarrow \frac{\vec{F}_q}{q} \equiv \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

---

## Campo Eléctrico - $N$ cargas puntuales $Q_i$ $i=1-N$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1-N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i)$$

---

## Campo Eléctrico - Distribución de carga ( $\lambda, \sigma, \rho$ )

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{distib}} \frac{dQ(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} (\vec{r}-\vec{r}')$$

---

$$dQ(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl' = \sigma(\vec{r}') dS' = \rho(\vec{r}') dV'$$

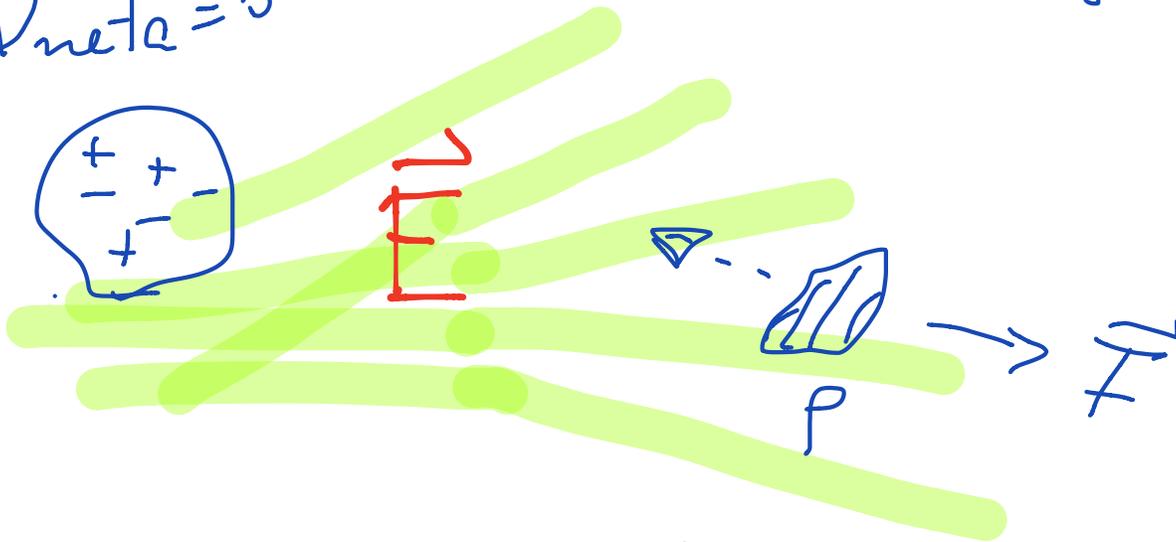
## EN RESUMEN

Carga eléctrica (en cualquiera de sus formas) genera un campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r})$  en todo punto del espacio.

Cualquier objeto cargado (tiene carga eléctrica) o con una distribución de carga (incluso cuando su carga neta es nula) en presencia de  $\vec{E}(\vec{r})$  sentirá una fuerza eléctrica (Coulomb)

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \int_{\text{distrib. carga}} dq(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r})$$

$Q_{\text{neto}} = 0$



Así, el campo eléctrico  $\vec{E}$  juega el papel más importante ya que una vez conocido, el cálculo de la fuerza que se ejerce sobre un objeto cargado en él es directo.

# PROPIEDADES DEL CAMPO ELECTRICO ( $\neq t$ )

Considera la expresión más general para el campo eléctrico generado por una fuente de carga eléctrica en todo el espacio

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}')$$

dist. carga

aplicable a cargas puntuales,  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$

A.  $\vec{E}(\vec{r})$  es irrotacional

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0}$$

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) \rightarrow \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0$$

hacer el ejercicio de demostrarlo!

**Consecuencia:**

$$* \vec{E} \text{ es conservativo} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

B. La fuente del campo eléctrico es la carga eléctrica

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

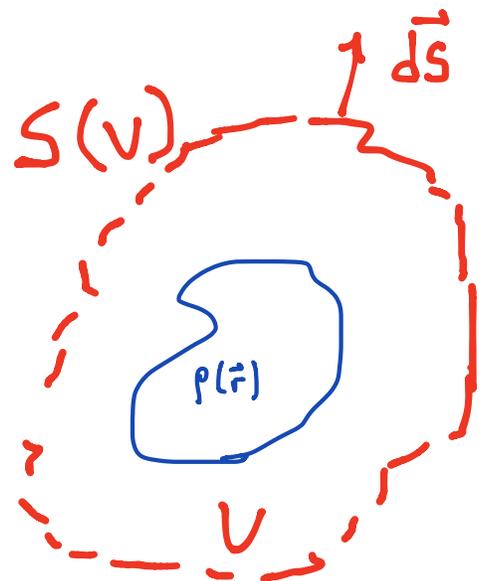
**Consecuencia:** Teorema de Gauss  
(de la electrostática)

Es una prescripción para integrar la ec. diferencial para el campo electrostático.

Facilita el cálculo del  $\vec{E}$  (en algunos casos - no siempre!)

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV = \oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV$$

$$\int_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$



El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total contenida en el volumen V encerrado por S.

# QUÉ HEMOS APRENDIDO?

## CARGA ELÉCTRICA



$\{Q, \lambda; \sigma; \rho\}$

→  $E(\vec{r})$  en todo el espacio

\* Se calcula en forma directa

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}')$$

CONOCIDO  $\vec{E}$ ,

descripción del fenómeno.  
está, en principio, resuelta.

Para objetos en presencia  
de  $\vec{E}$ , la fuerza que sobre  
ellos ejerce el campo eléctrico  
será

$$\vec{F}_q(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

$q \equiv$  carga puntual objeto

OJO: casos de dist. de carga

\* A partir de la ecuación diferencial  
que satisface

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

no es simple!

Aprovechar propiedad (si es posible)

teo. Gauss

$$\int_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$$

$Q_V \equiv$  carga encerrada en vol  $V$

\* En forma indirecta, usando propiedad  
irrotacional de  $\vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

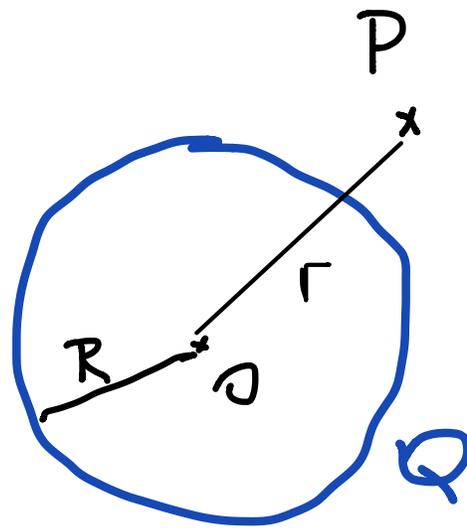
Cómo calcular  $V = ?$

## EJEMPLO:

Carga  $Q$  distribuida uniformemente  
como una película sobre una superficie  
de radio  $R$ .  $\vec{E}(\vec{r})$  en  $P$ ?

esfera

$$r \gtrless R$$



$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

\*  $r > R$  (fuera de distribución de carga)

-  $\vec{E}$  por integración directa (Auxiliar)

-  $\vec{E}$  a partir de teo Gauss

$$\int_{S'(v)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{no aporta}$$

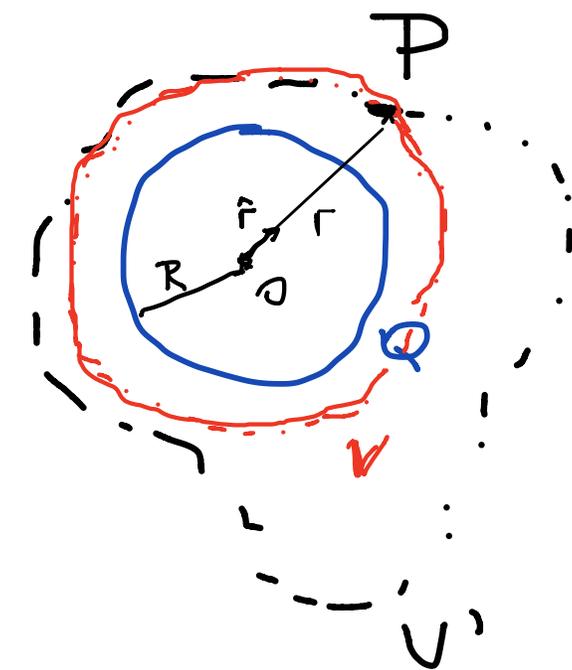
$$\int_{S(v)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Sobre toda la superficie de integración

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$$

$$d\vec{S} = dS \hat{r}$$

$$\int_{S(v)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S(v)} E(r) dS = \underline{E(r)} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



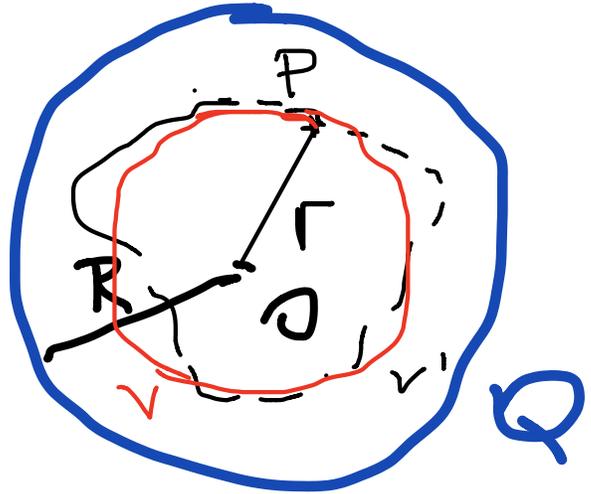
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

\*  $r < R$

mismo argumento anterior.

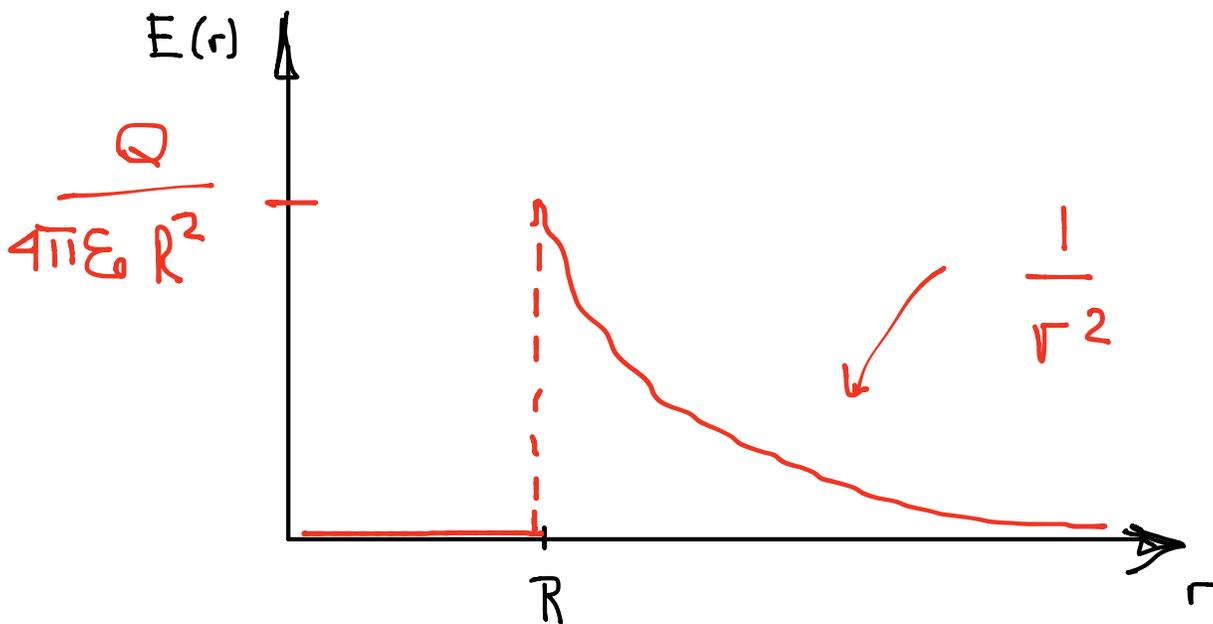
La simetría del problema

permite afirmar que el campo será el mismo a distancia  $r$  del origen  $\Rightarrow$



$$\int_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 4\pi r^2 = 0 \quad (\text{no hay carga en cerrada en } V)$$

$$\Rightarrow E(r) = 0 \quad r < R$$



Hay una discontinuidad del campo eléctrico en la superficie

$$\vec{E}(r=R^+) - \vec{E}(r=R^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r} \quad \sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \equiv \text{densidad superficial carga}$$

para punto P fuera de la distribución

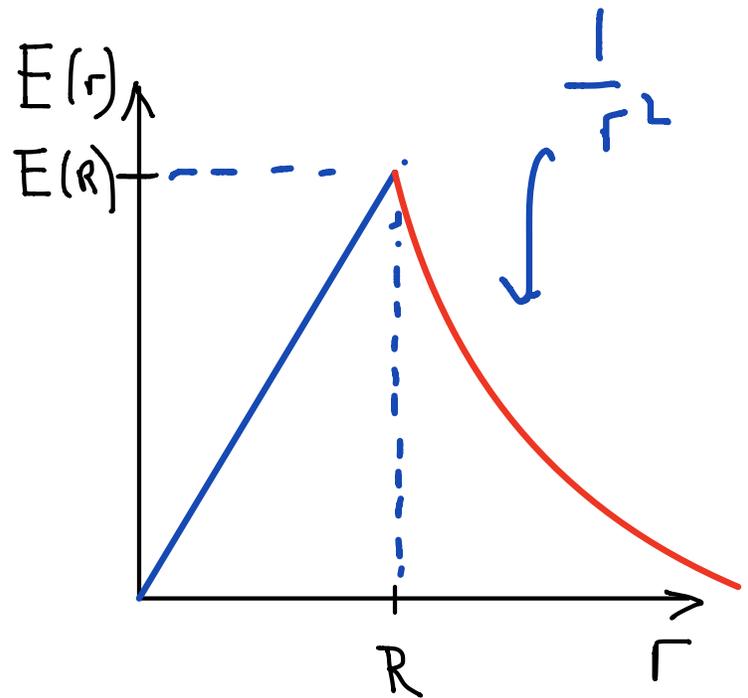
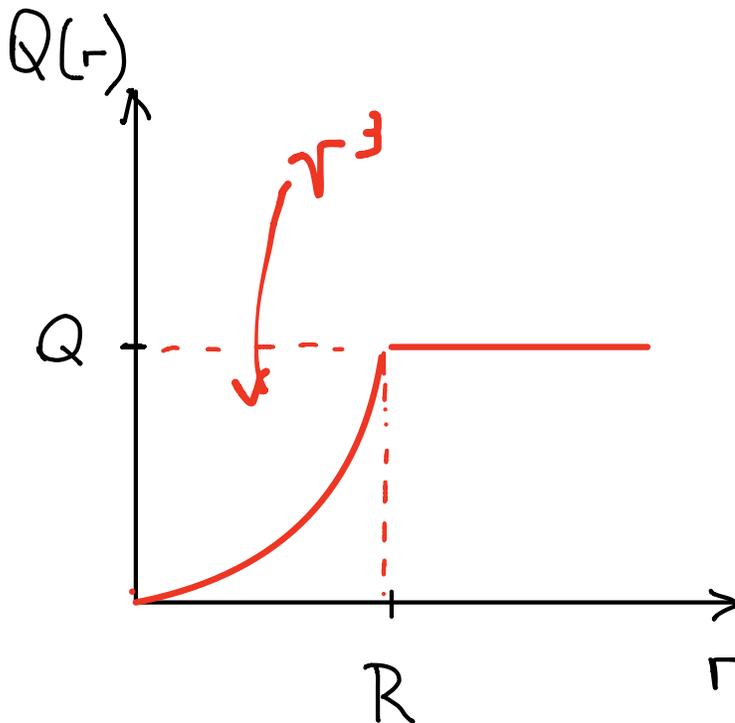
$$r \geq R \quad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

para punto P dentro de la distribución

$$r < R \quad \vec{E}(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

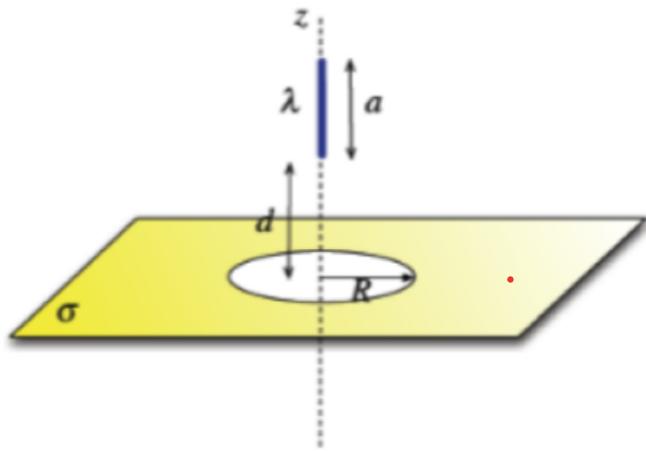
y la carga  $Q(r)$  es aquella encerrada en una esfera de radio  $r$ ,

$$Q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{r}{R}\right)^3 Q$$



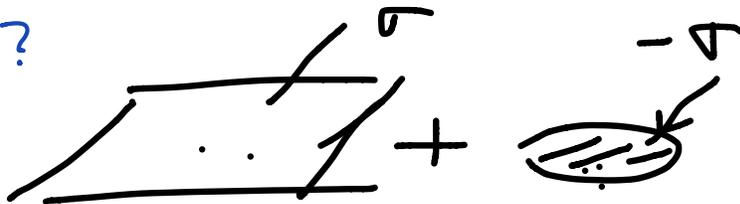
## EJEMPLO:

Plano  $\infty$  con densidad superficial  $\sigma$   
de carga eléctrica. Orificio de radio  $R$   
en plano.



Línea con densidad de carga lineal  $\lambda$ , largo  $a$ , ubicada a partir de distancia  $d$ .

Fuerza que se ejerce sobre línea de carga?



Veamos como resolverlo?

Básicamente es calcular la fuerza eléctrica entre distribuciones de carga

La complicación se debe a la geometría

$$\vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{(d+a)^2 + R^2} - \sqrt{d^2 + R^2} \right] \hat{k}$$

$$\text{Si } R \rightarrow 0 \quad \vec{F} = \frac{\lambda\sigma}{2\epsilon_0} a \hat{k}$$

$$= (\lambda a) \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} \right)$$

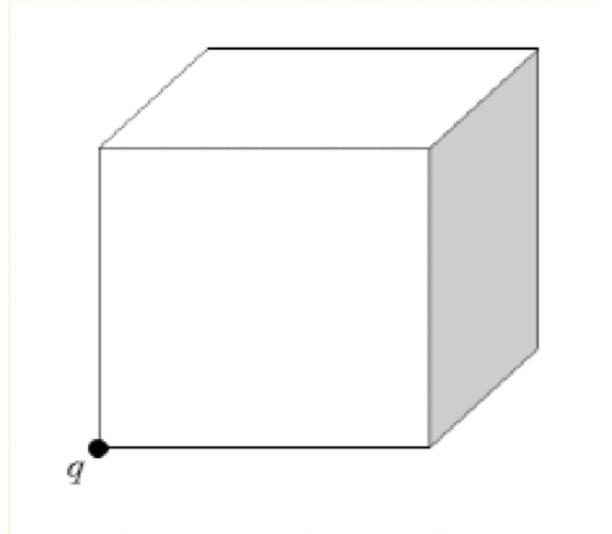
$$= Q \vec{E} \quad Q = \lambda a = \text{carga total de línea de carga}$$

eso significaría que una densidad superficial de carga  $\sigma$   
produce un campo

$$\sigma \quad \uparrow \hat{k} \quad \downarrow \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

## EJEMPLO:

Carga  $q$  en una esquina de un cubo. ¿Cuál es el flujo de campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de cara gris del cubo?



$$\int_{\text{Cara gris}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = ?$$

## VISUALIZACIÓN DE $\vec{E}$

Se trata de determinar el l.g. de las trayectorias cuya tangente es paralela al  $\vec{E}$  en el espacio

$$\hat{t} \text{ a trayectoria} \parallel \vec{E} \Rightarrow \left[ \hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \lambda \vec{E} \right]$$

Las trayectorias obtenidas se llaman

**Líneas de campo eléctrico** o **líneas de fuerza**

permite visualizar la intensidad y la dirección de  $\vec{E}$  en el espacio

# EJEMPLO

Caso de una carga puntual  $q$ . Visualizar el  $\vec{E}$  que produce

Una carga puntual produce un campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Si  $q$  se ubica en  
origen de radio vector

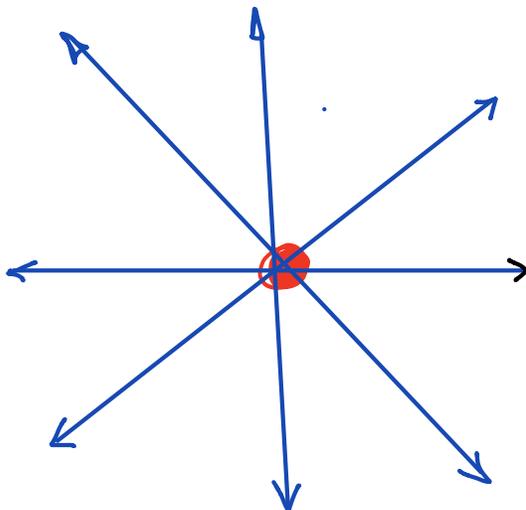
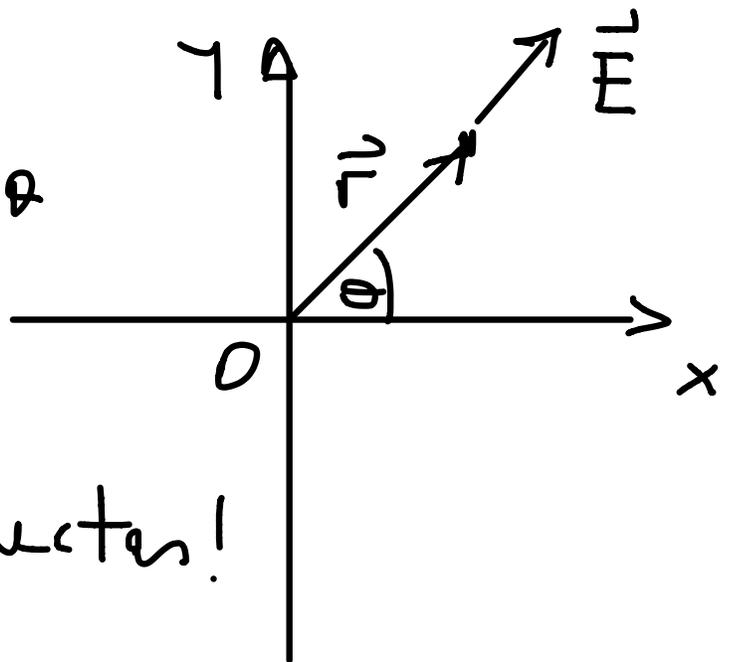
Líneas de campo  $\vec{E}$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \hat{i} + \frac{dy}{ds} \hat{j} = \lambda (E_x \hat{i} + E_y \hat{j})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \tan \theta$$

$$\Rightarrow y = \tan \theta \cdot x$$

(rectas!)



La dirección depende del  
signo de la carga:  
líneas de  $\vec{E}$  salen de carga (+)  
y llegan a carga (-)

## SENTIDO de líneas de $\vec{E}$

Líneas de  $\vec{E}$  nacen en (+) y terminan en (-) es una elección coherente con la ec. de Maxwell

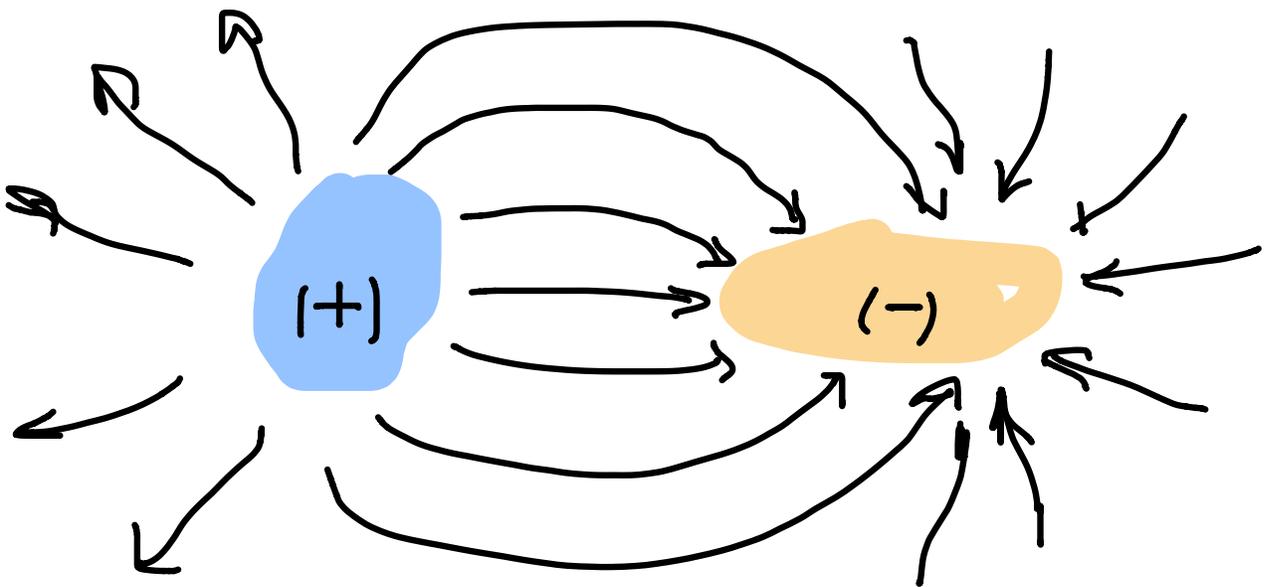
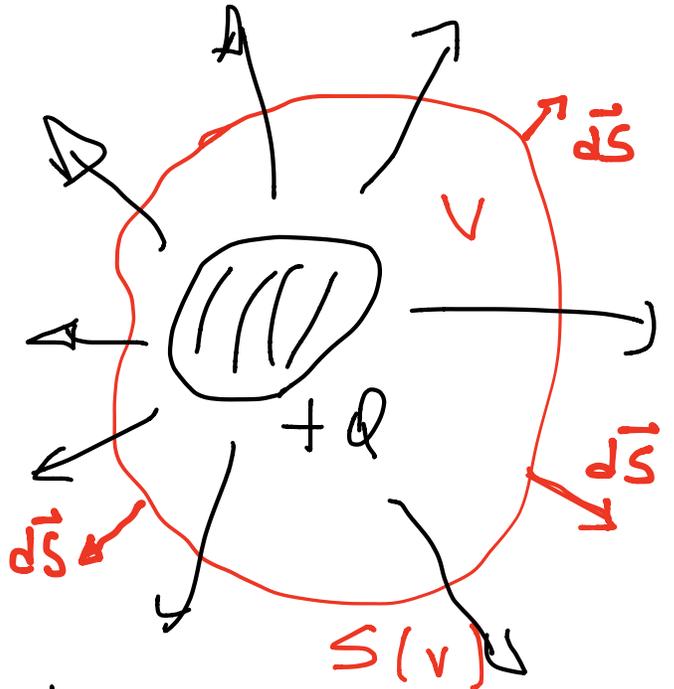
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_{S(v)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

$d\vec{S}$  apunta hacia afuera

∴ si  $\vec{E}$  (sobre la superficie) apunta

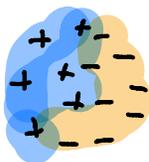
hacia afuera también  $\Rightarrow \phi$  a través de  $S(v) > 0$

$\Rightarrow Q_v > 0$  en consistencia en teorema



Y QUÉ SUCEDE SI HAY CARGA (+) y (-) PERO  $Q_{total} = 0$  ?

$Q = 0$



?

# POTENCIAL ELECTRICO

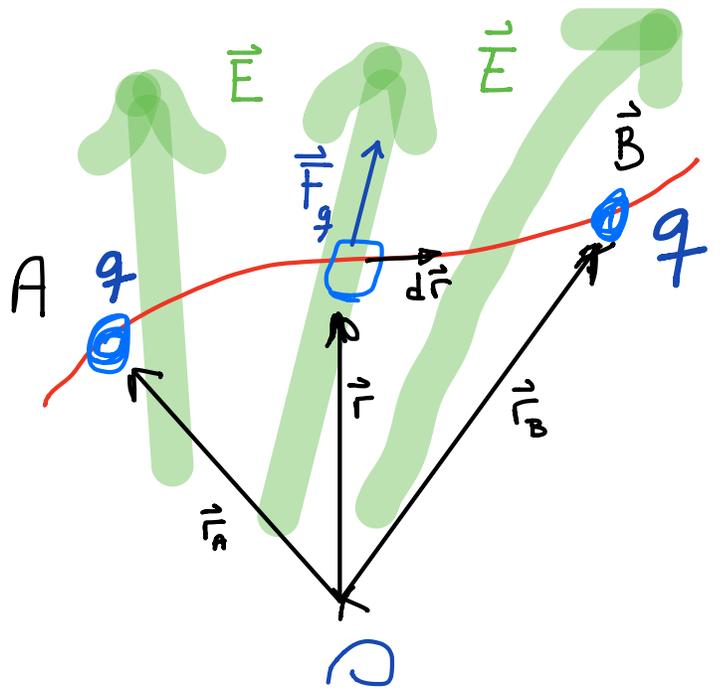
La característica conservativa del  $\vec{E}$  (o la fuerza eléctrica), expresada por la propiedad

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$$

es decir, existe una función escalar  $V(\vec{r})$  - debido a la presencia de la carga eléctrica - a partir de la cual se puede derivar el campo eléctrico.

Considerar carga  $q$ ; en presencia de  $\vec{E}$ , actúa sobre ella una fuerza eléctrica

$$\vec{F}_q = q \vec{E}$$



Para mover la carga en un elemento infinitesimal de la trayectoria de  $A \rightarrow B$ , la fuerza realiza una cantidad infinitesimal de trabajo

$$dW = \vec{F}_q \cdot d\vec{r} = q \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

suponiendo:  $\vec{E} = -\nabla V$   $V = V(\vec{r}) =$   
 $\equiv V(x, y, z)$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} dW = -\nabla V \cdot d\vec{r}$$
$$= -\left[ \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right]$$
$$dV(x, y, z) \equiv dV(\vec{r})$$

Entonces:  $dV(\vec{r}) = -\frac{1}{q} dW$

integrando para cuantificar el trabajo realizado por  $\vec{F}_q$  para llevar carga  $q$  desde  $A \rightarrow B$

$$\int_A^B dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$$
$$= -\frac{1}{q} [W(B) - W(A)]$$
$$= -\frac{1}{q} W(A \rightarrow B)$$

$$\Rightarrow \underline{V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = -\frac{1}{q} W(A \rightarrow B)}$$

Llamando

$V \equiv$  función potencial eléctrico

La diferencia de la función potencial eléctrico entre los puntos  $A$  y  $B$  corresponde a (-) el trabajo hecho por la fuerza eléctrica

por unidad de carga para llevar la carga de A  $\rightarrow$  B.

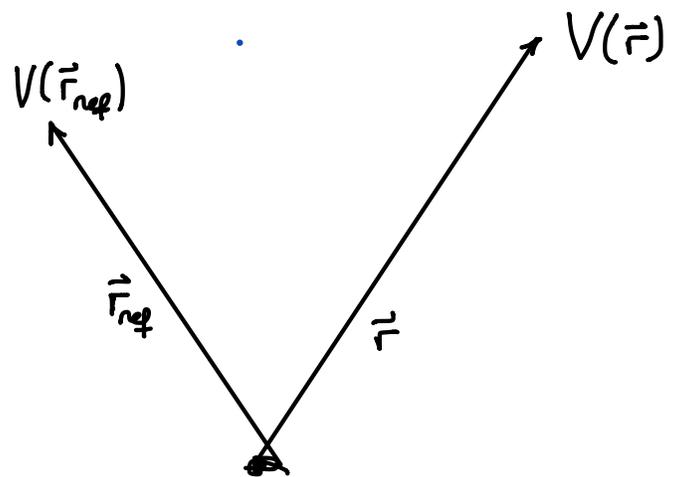
$$\text{Como } \vec{F}_g = -\vec{F}_{\text{ext}}$$

la diferencia de potencial entre A y B es igual al trabajo realizado por unidad de carga por una  $\vec{F}$  externa para llevar carga de A  $\rightarrow$  B

OBSERVAR : la diferencia del valor de V entre 2 puntos está bien definido, pero no así la función potencial eléctrico propiamente tal.

El potencial eléctrico en un punto del espacio estará siempre referido al valor arbitrario dado al potencial en un punto de referencia :

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{\text{ref}}) - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$



$V(\vec{r}_{\text{ref}}) \equiv$  constante arbitraria  
(a elección)

USUAL:  $V(\vec{r}_{af} \rightarrow \infty) = 0$  para distribuciones finitas de carga!

Cuidado para distribuciones infinitas de carga

## UNIDADES

$$[V] = \frac{[\text{trabajo}]}{[\text{carga}]} \rightarrow \frac{J}{C} \equiv V \text{ [Volt]}$$

Esta unidad genera alternativa para medir el campo eléctrico,

$$[\vec{E}] = \frac{\text{Volt}}{m} \equiv \frac{V}{m}$$

## POTENCIA

$$P = \frac{dW}{dt} \rightarrow [P] = \frac{J}{s} = \text{Watt} = [W]$$

$$\Rightarrow [W] = \text{Energía} = W \cdot s \text{ [Watt-seg]}$$

# CALCULO DEL POTENCIAL ELECTRICO

Considerando que  $V(\vec{r})$  es una función escalar, con un significado preciso, veamos formas de calcularla:

1) A partir de  $\vec{E}(\vec{r})$ : 
$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{ref}) - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Si  $V(\vec{r} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  usual tomar  $V(\vec{r}_{ref} = \infty) = 0$

$$\gamma \quad V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

Requiere conocer  $\vec{E}(\vec{r})$  en todo el espacio

2) A partir de las cargas eléctricas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dq(\vec{r}') \quad \gamma \quad \nabla_{\vec{r}} \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = - \nabla_{\vec{r}} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} + V(\vec{r}_{ref}) \right]$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{ref}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Vol dist larga

dist. finitas de carga  $V(\vec{r}_{ref} = \infty) = 0$

### 3. A partir de las cargas eléctricas vía ec. diferencial

Recordar ec. de Maxwell que indica que la fuente del  $\vec{E}$  son las cargas eléctricas,

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \\ \text{además, } \vec{E} &= -\nabla V(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \quad \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{Poisson}$$

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

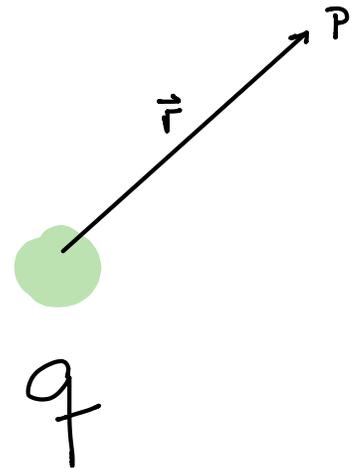
operador diferencial  $\equiv$  Laplaciano

## EJEMPLOS

Carga puntual : Potencial eléctrico en un punto arbitrario P definido por vector posición  $\vec{r}$ ?

Origen de  $\vec{r}$  coincide con ubicación de  $q$

1) a partir del  $\vec{E}$



$$\text{Carga puntual} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$V(\vec{r}) \rightarrow V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$$V(r) = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2) A partir de la carga  $q$

$$V(r) = V(r_{ref}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(r')}{r} = V(r_{ref}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \underbrace{\int dq(r')}_q$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

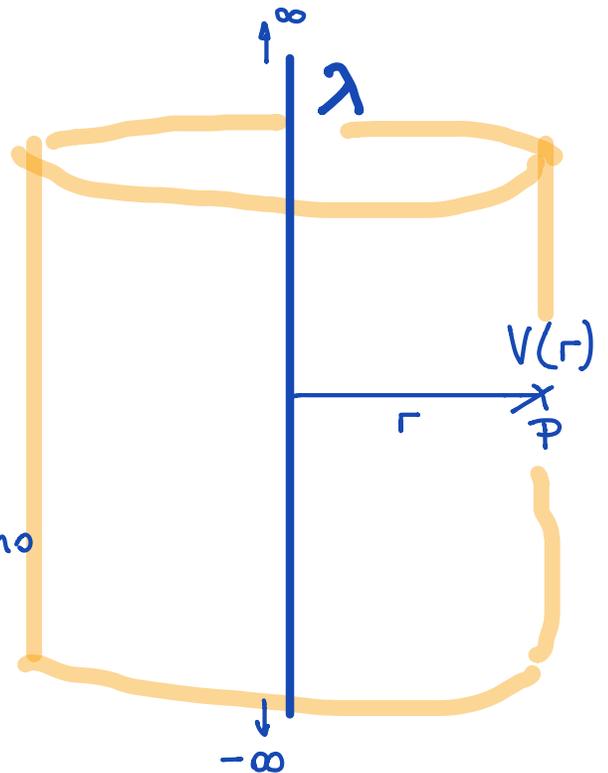
3) A partir de Poisson

difícil - no tiene sentido para este problema

## DISTRIBUCION LINEAL $\lambda$ DE CARGA

Calcular potencial eléctrico a distancia  $r$  de una distribución lineal de carga  $\lambda$  y de longitud  $\infty$

1) Simetría del problema indica que función potencial toma el mismo valor sobre manto cilíndrico de radio  $r$



$$V(\vec{r}) \rightarrow V(r) = V(r_{ref}) - \int_{r_{ref}}^r \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r} \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{Gauss})$$

$$V(r) = V(r_{ref}) - \int_{r_{ref}}^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr'}{r'}$$

$$V(r) = V(r_{ref}) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_{ref}}\right)$$

Por ser la distribución de carga  $\infty$  larga,  $V(r_{ref} = \infty) \neq 0$

Pero no importa ya que la medida con sentido físico es la diferencia de potencial eléctrico entre 2 puntos,

por ej.  $r = a$  y  $r = b > a$

$$V(b) - V(a) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{r_{ref}}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{r_{ref}}\right)$$

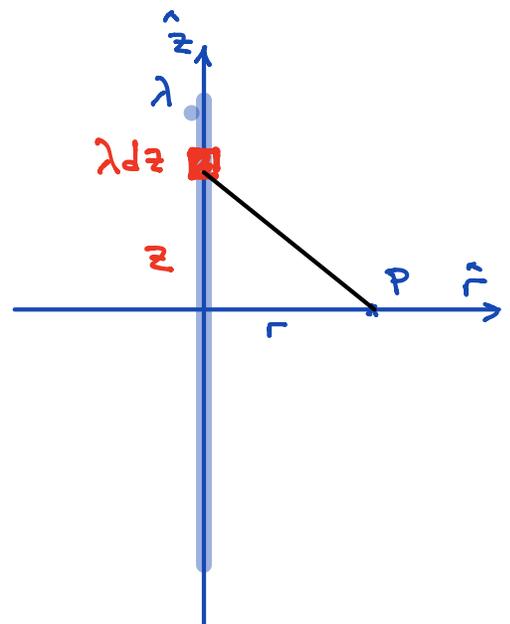
$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad \text{independiente de } r_{ref}$$

2. Otra manera de calcular  $V(r)$  es hacerlo directamente a partir de la distribución de carga  $\lambda$

$$V(r) = V(r_{ref}) + \int \frac{dq(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{r} = r \hat{r}; \quad \vec{r}' = z \hat{z} \quad \|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$dq(\vec{r}') = \lambda dz$$



$$\Rightarrow V(r) = V(r_{ref}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dz}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\downarrow \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2+L^2} + L}{\sqrt{r^2+L^2} - L} \right] \quad L \rightarrow \infty$$

$$= V(r_{ref}) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2+L^2} + L}{r} \right]^2$$

$$V(r) = V(r_{ref}) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2L}{r} \right) \quad \begin{array}{l} L \rightarrow \infty \\ r \text{ finito} \end{array}$$

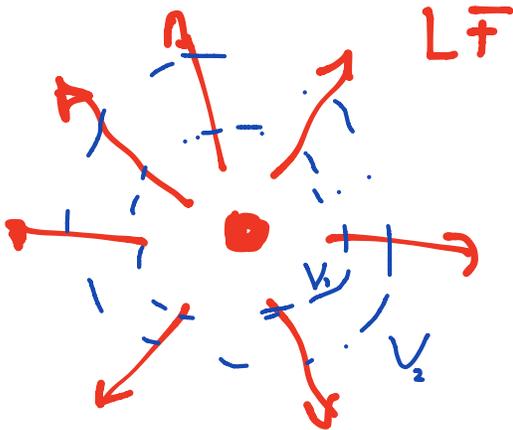
a) Calcular  $\vec{E} = -\nabla V$  y verificar

b) Diferencia de potencial  $V(b) - V(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{a}{b} \right)$

# VISUALIZACIÓN DEL POTENCIAL ELÉCTRICO

## SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL

Lugar geométrico de los puntos en que  $V = \text{Constante}$



Caso de una carga puntual

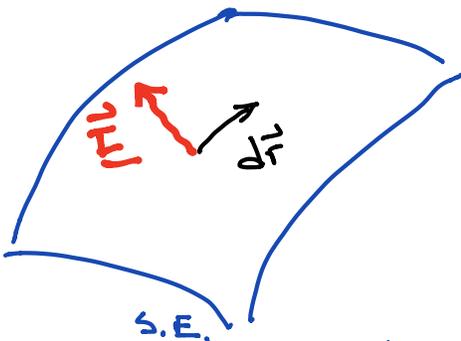
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \text{S.E. } \underline{r = \text{cte}}$$

Las sup. equip. son esferas de radio  $r_1, r_2, \dots$

PROPIEDAD: Las superficies equipotenciales son  $\perp$  al campo eléctrico (o líneas de  $\vec{E}$ )

$$\vec{E} = -\nabla V \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV$$

$$\text{en S.E. } dV = 0$$

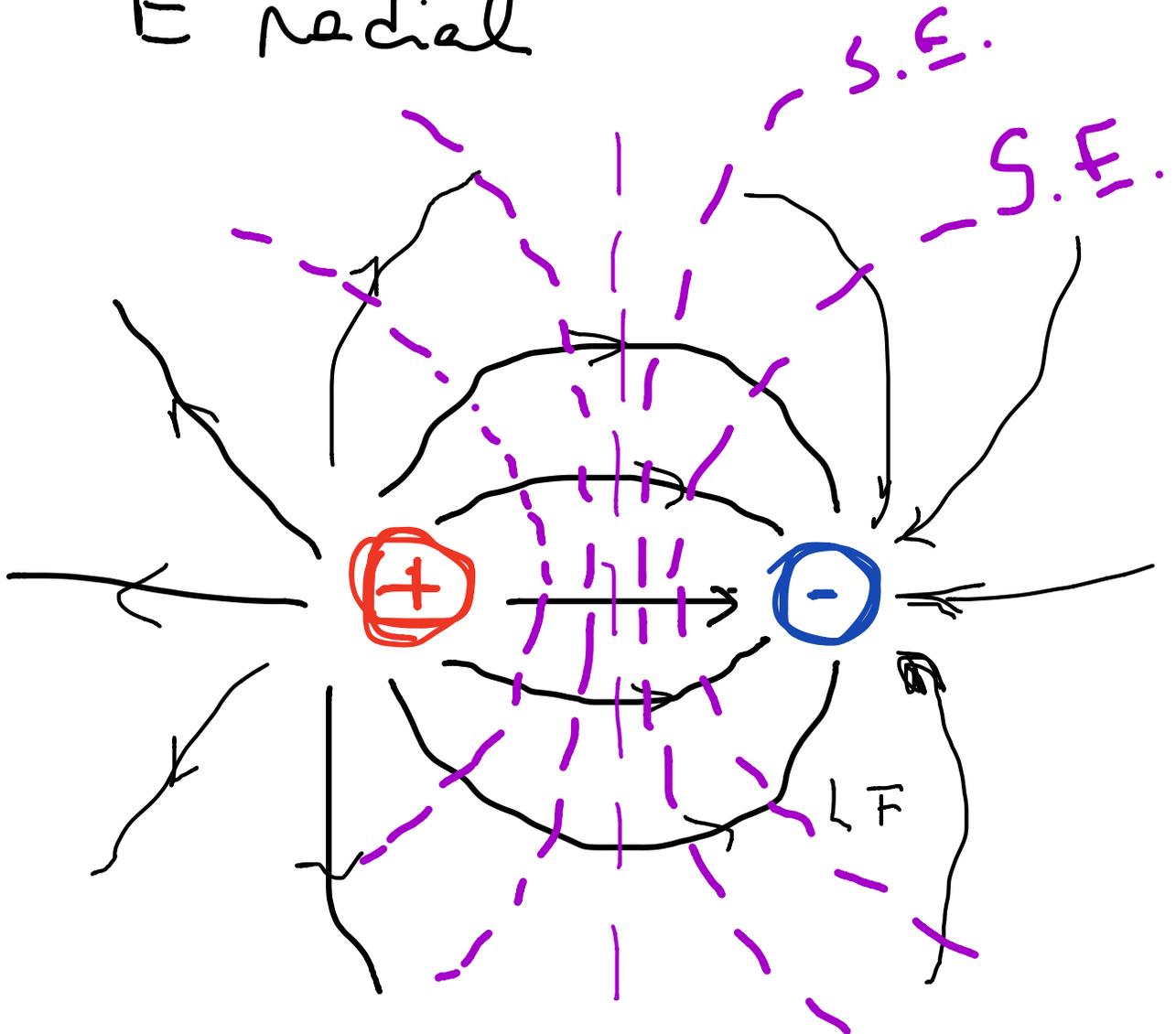
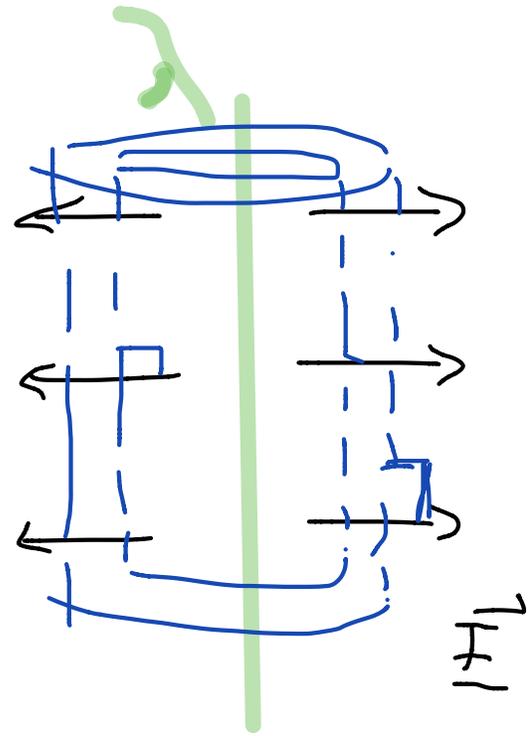
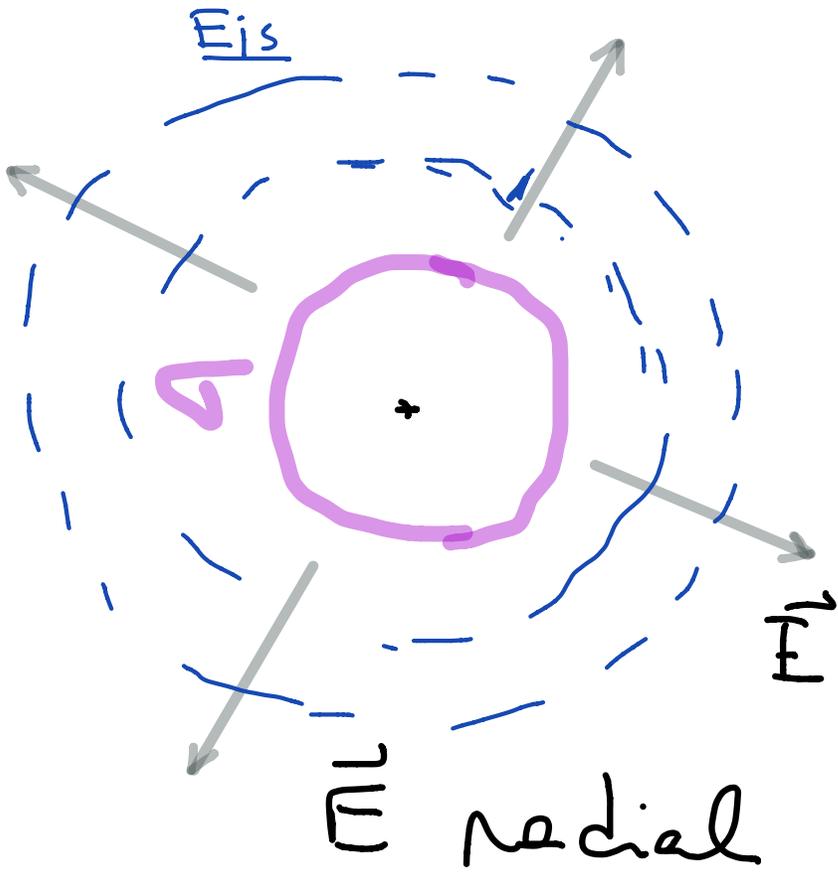


$$\Rightarrow d\vec{r} \perp \vec{E}$$

ya que  $d\vec{r}$  describe trayectoria

contenida en S.E.

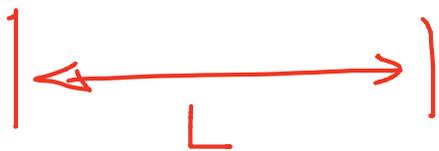
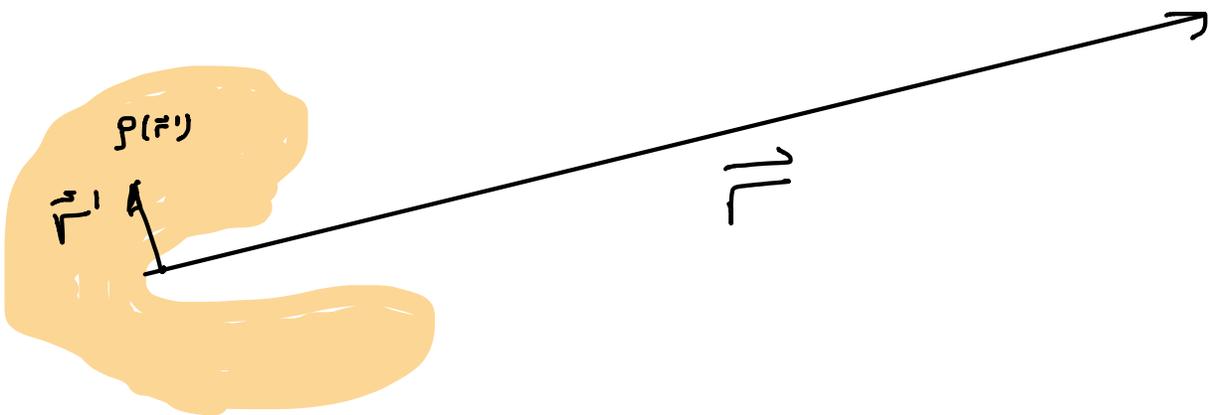
∴  $\vec{E}$  siempre es normal a superficie equipotencial



# EXPANSION MULTIPOLAR DEL POTENCIAL

No siempre es directo el cálculo de  $V(\vec{r})$  para una distribución de carga dada. A veces tampoco se quiere el resultado exacto y una buena aproximación a él es suficiente.

Suponga que existe una distribución finita de carga que ocupa un lugar limitado del espacio

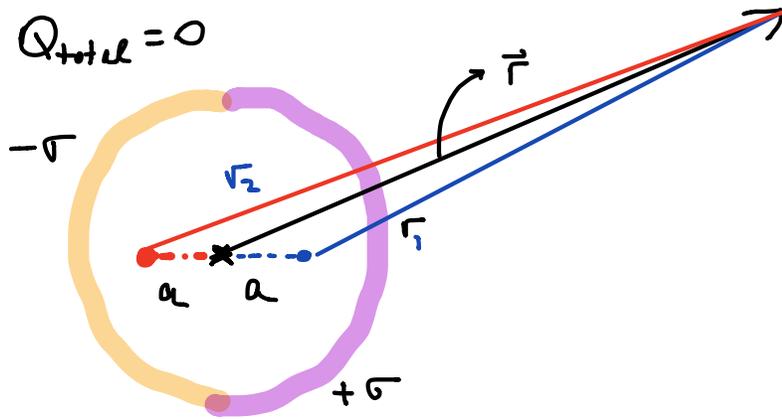


$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$L \equiv$  dimensión característica de la distribución  $\rho$

$$\left. \begin{aligned} \text{Si } \|\vec{r}\| \gg L \rightarrow V(\vec{r}) \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q &= \int \frac{dq}{\text{dist}} \\ r &= \|\vec{r}\| \end{aligned}$$

A medida que nos acercamos a la distribución, habrán correcciones al resultado observado para  $r \rightarrow \infty$



$$V(\vec{r}) = 0 \quad r \gg L$$

Al acercarse

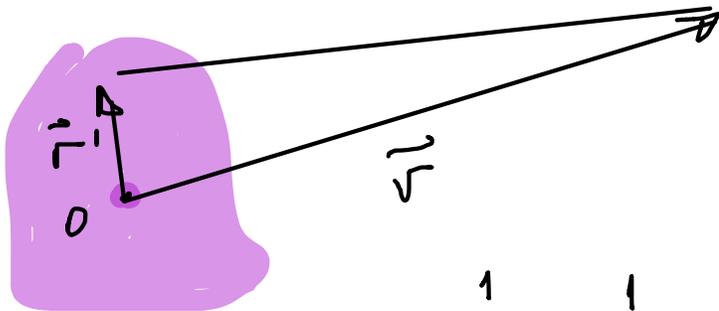
$$V(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right] \neq 0$$

$$q = \sigma (2\pi R^2)$$

$\Rightarrow$  existe  $V$  aunque la carga total de esfera es nula

### DESARROLLO:

Ubicar origen de coordenadas coincidiendo con la coordenada centro de carga y tal que la distribución de carga presente alguna simetría (si existe) con respecto a él.



Llamar

$$\|\vec{r}\| = r \quad \|\vec{r}'\| = r'$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \pm \dots$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int dq(r') + \frac{\hat{r} \cdot}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \vec{r}' dq(r') \pm \dots$$

# Introducción: MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO



$$\vec{p} =: \int_{\text{dist}} \vec{r} dq(\vec{r}) \Rightarrow \int_{\text{dist}} \vec{r} \rho dV$$

Potencial eléctrico:

$$V(\vec{r}) \simeq V_{\text{monopolo}} + V_{\text{dipolo}} + V_{\text{cuadrupolo}} + \dots$$

$\sim \frac{1}{r}$                        $\sim \frac{1}{r^2}$                        $\sim \frac{1}{r^3}$

$$V_{\text{monopolo}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$Q = \int dq(\vec{r})$$

Carga total

$$V_{\text{dipolo}} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

· etc!

A expansión multipolar para  $V \Rightarrow$  expansión multipolar para  $\vec{E} \rightarrow$

$$\vec{E}(\vec{r}) \simeq \vec{E}_{\text{monopolo}} + \vec{E}_{\text{dipolo}} + \dots$$

$$\vec{E}_{\text{monopolo}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{dipolo}} = \frac{(3\hat{r} \cdot \vec{p} \hat{r} - \vec{p})}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

# DIPOLO ELECTRICO

Corresponde a una distribución particular de cargas eléctricas tal que  $Q_{\text{neto}} = 0$

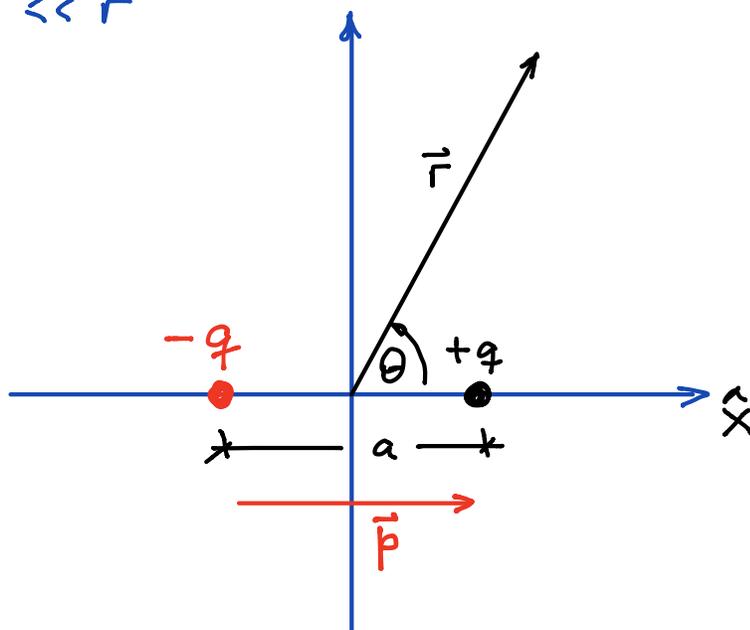
Se caracteriza por cargas  $\pm q$  separadas distancia " $a$ "  $\ll r$

$$V_{\text{monopolos}} = 0 \quad (Q_{\text{neto}} = 0)$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}' dq(\vec{r}') =$$

$$= \int \frac{q}{2} \hat{x} dq + \int \left(-\frac{q}{2}\hat{x}\right) dq$$

$$= qa\hat{x} = q\vec{a}$$

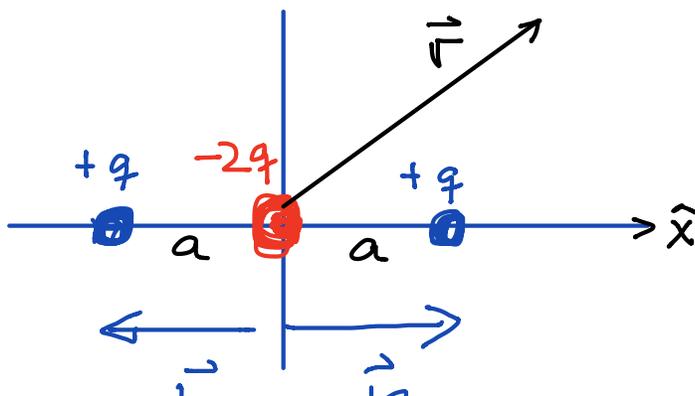


$$\Rightarrow \underline{V_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qa \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2}}$$

Ejercicio: analizar si hay contribución del término siguiente en la expansión (contribución cuadrupolar)

Ejercicio:

$$V(\vec{r}) \simeq ?$$

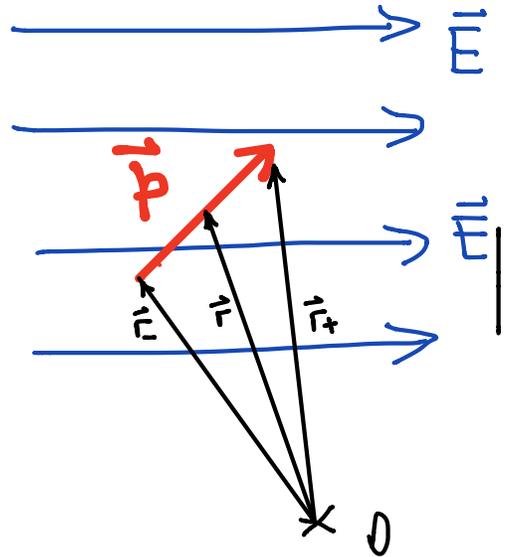


## DIPOLO EN $\vec{E}$ EXTERNO

Calcular la fuerza y el torque que se sobre dipolo  $\vec{p}$  cuando se ubica en presencia de  $\vec{E}$

$$\vec{F} = -q\vec{E}(\vec{r}_-) + q\vec{E}(\vec{r}_+)$$

$$\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \pm \frac{a}{2}\hat{a}$$



Demostren  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}(\vec{r})$

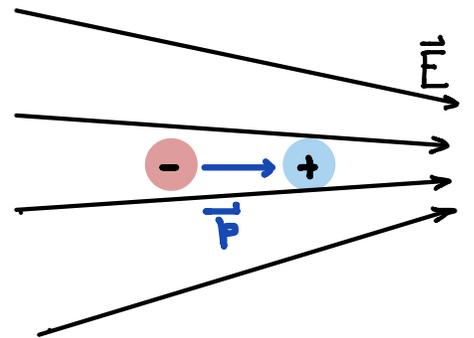
→ 0 si  $\vec{E}$  uniforme

$$(\vec{p} \cdot \nabla) \equiv p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

EJEMPLO:

dipolo eléctrico en campo  $\vec{E}$  no uniforme (ver figura)

En este caso, la mitad del dipolo puede estar donde el campo es más intenso que en la región donde está la otra mitad  $\Rightarrow$  una fuerza neta sobre el dipolo  $\vec{p}$ .



El torque con respecto al punto medio del dipolo

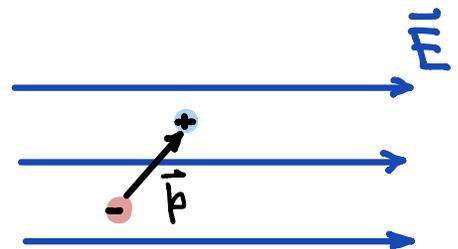
$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{\vec{a}}{2} \times [\vec{F}(\vec{r}_+) - \vec{F}(\vec{r}_-)] \\ &= q \frac{\vec{a}}{2} [\vec{E}(\vec{r}_+) + \vec{E}(\vec{r}_-)]\end{aligned}$$

$$\vec{\tau}_{\text{pto medio}} \approx \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

## ENERGIA DEL DIPOLO

$$W = qV(\vec{r}_+) - qV(\vec{r}_-) = -q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

$$\Rightarrow W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



El dipolo  $\vec{p}$  rota en el campo  $\vec{E}$  de manera de alinearse con la dirección de  $\vec{E}$  (posición de energía mínima).

# ENERGIA ELECTROSTATICA

(Sistema de cargas o distribuciones de carga)

Cuál es el interés?

Tener un conjunto de cargas en una distribución dada o tener carga distribuida en un volumen (superficie o longitud) significa que se gastó una cierta cantidad de energía para formarlas → esa energía gastada queda almacenada en el sistema de cargas como energía electrostática.

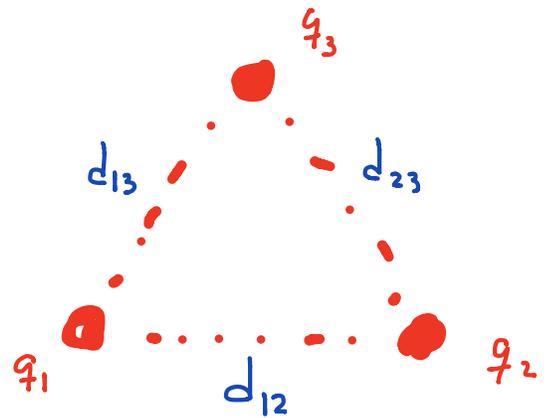
Ejemplo: Sea una configuración de 3 cargas puntuales  $q_i$  ubicadas en vértices de un triángulo

¿Qué energía almacena?

poner carga 1 en pos. (1) →  $W_1 = 0$

poner carga 2 en pos. (2) →  $W_2 = q_2 V_{(1)}^{(2)}$   
 $= q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d_{12}}$

poner carga 3 en pos. (3) →  $W_3 = q_3 V_{(1)}^{(3)} + q_3 V_{(2)}^{(3)}$   
 $= \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 d_{13}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{23}}$



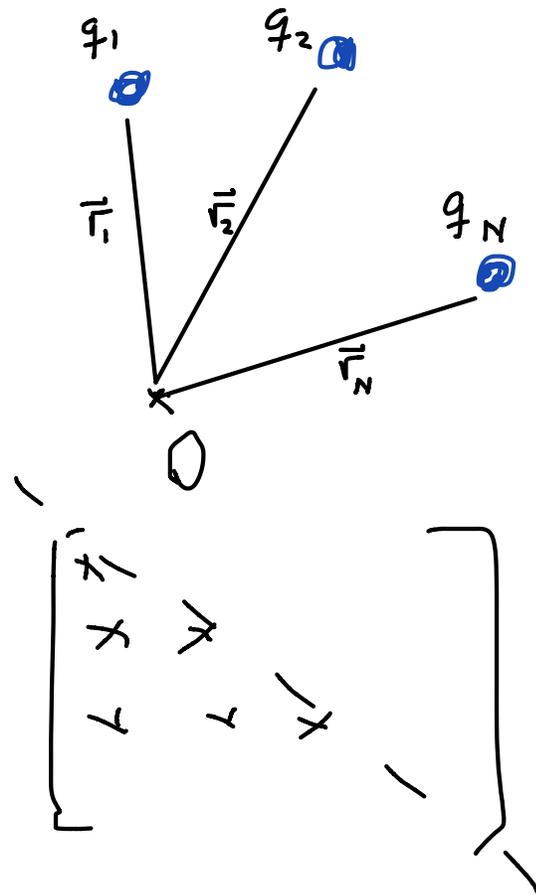
energía electrostática almacenada →  $W = W_1 + W_2 + W_3 \rightarrow W_2 + W_3$

# Caso: distribución de N cargas puntuales $\{q_i\}$

¿energía almacenada?

$$W_e \equiv \text{energía eléctrica} = \sum_{i=1}^N \delta W_i$$

$\delta W_i \equiv$  energía externa necesaria para poner  $q_i$  en posición  $\vec{r}_i$



$$W_e = 0 + q_2 V_1(2) + q_3 V_1(3) + q_3 V_2(3) +$$

$$q_N V_1(N) + q_N V_2(N) + q_N V_3(N) + \dots + q_N V_{N-1}(N)$$

$$= \sum_{i \neq 1}^N \sum_{j=1}^{i-1} q_i V_j(i)$$

$V_j(i) \equiv$  potencial en posición de carga  $q_i$  debido a  $q_j$

Introduciendo  $V_i(i) \equiv 0 \quad \forall i$

$$W_e = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i q_i V_j(i) \Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N q_i V_j(i)$$

Alternativamente: \_\_\_\_\_

$$V(i) = \sum_{j \neq i} V_j(i)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(i)$$

$V(i) \equiv$  potencial en (i) debido a cargas  $j \neq i$

CASO: Densidad de carga  $\rho(\sigma, \lambda)$

$$q_i \rightarrow dq(\vec{r}) \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{distrib}} V(\vec{r}) dq(\vec{r})$$

---

Por ejemplo, si se trata de una densidad volumétrica de carga  $\rho$

$$W_e \rightarrow W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{dist}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dV \quad \textcircled{\rho} V$$

(todo el espacio)

$$dq = \rho dV$$

EN FUNCIÓN DEL  $\vec{E}$

recordar  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} V$

$$= \epsilon_0 [\nabla \cdot (V\vec{E}) - \underbrace{(\nabla V) \cdot \vec{E}}_{-\vec{E}}]$$

$$\Rightarrow 2 W_e = \epsilon_0 \int_{\text{todo espacio}} \|\vec{E}\|^2 dV + \epsilon_0 \int_{\text{todo espacio}} \nabla \cdot (V\vec{E}) dV$$

$$\oint_{S \rightarrow \infty} (V\vec{E}) \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$$

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{todo espacio}} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 dV$$

$\vec{E}$  = campo eléctrico  
producido por  
cargas eléctricas

Con estas ideas sobre energía cubrimos los  
conceptos más importantes sobre el fenómeno  
asociado a la existencia de carga eléctrica  
- en el vacío -

Pero la naturaleza es un poco más complicada  
y la carga eléctrica es parte intrínseca de la  
estructura de la materia. Por ello, nuestro próximo  
nivel de comprensión del fenómeno eléctrico es entender  
el comportamiento de los campos eléctricos en la materia.

# CAMPOS ELÉCTRICOS EN MATERIALES

CONDUCTORES Y DIELECTRICOS

Básicamente, desde un punto de vista macroscópico, la materia presenta ciertos comportamientos extremos del punto de vista eléctrico:

MATERIA → CONDUCTORES  
DIELECTRICOS (aislantes)

La realidad está en algún lugar intermedio, con la materia presentando ambas características en alguna medida.

# CONDUCTORES (Ideales)

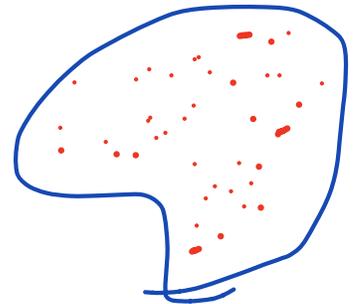
MODELO: un material es un conductor (ideal) cuando tiene un gran número de electrones libres de moverse a través del material

El material conductor debe estar formado por átomos que tienen un número importante de  $e^-$  débilmente ligados ( $e^-$  de conducción) y lo que les permite moverse libremente por el medio — permanecen en el medio debido a tensiones superficiales.

Ejemplo clásico: material de Cu (metales en general son buenos materiales conductores)

## CONSECUENCIAS

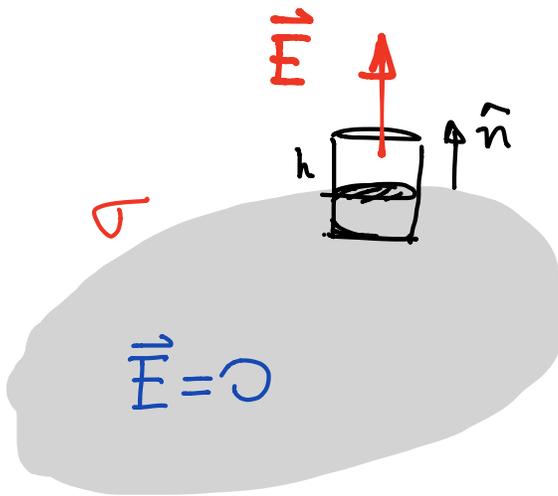
\*  $\vec{E} = 0$  en el interior de un conductor



\* Volumen de un conductor es una equipotencial

$V(\vec{r}) = \text{constante}$  en todo el conductor

\* El  $\vec{E}$  es normal a la superficie del conductor en puntos cercanos a él.



Tomar "píldora" gaussiana de sección  $\Delta A$  y altura  $h \rightarrow 0$

$$\oint_{S(v)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

sobre la superficie,  $h \rightarrow 0$        $\vec{E} = E \hat{n}$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

o o

---


$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$


---

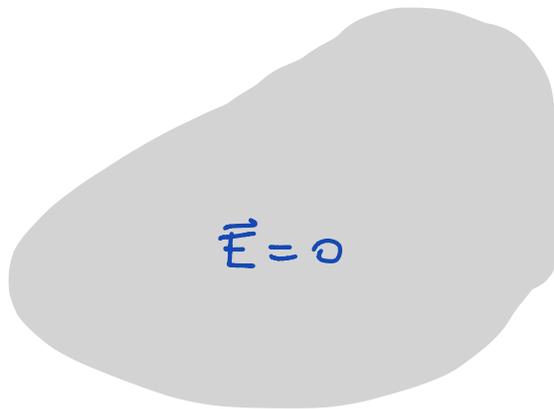
\* Conductor aislado es neutro (electricamente)

tiene tanta carga positiva como negativa

- Si no hay cargas eléctricas y/o campos eléctricos en su vecindad, su presencia no genera un efecto eléctrico

- En presencia de  $\vec{E}$  externo, genera un efecto eléctrico ya que se induce una distribución superficial de cargas  $\sigma$  y tal que  $\int_{\text{cond}} \sigma dS = 0$

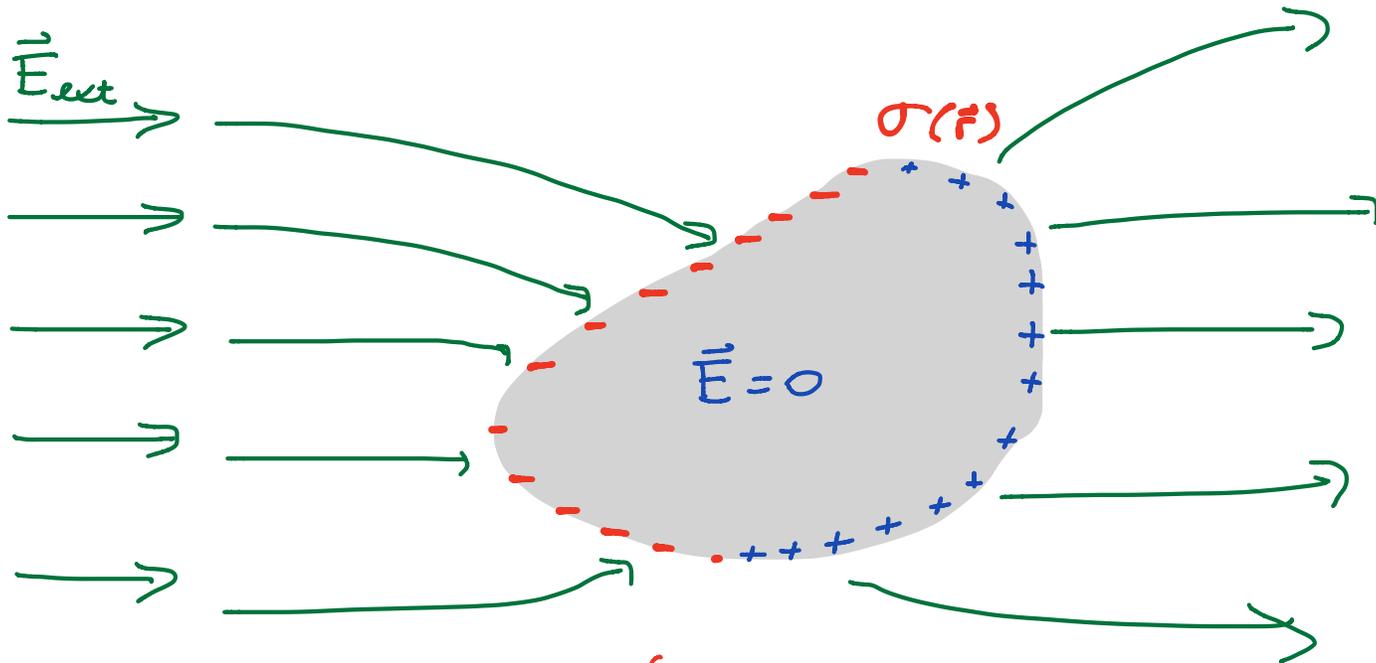
Aislado  
Descargado



$$\vec{E} = 0$$

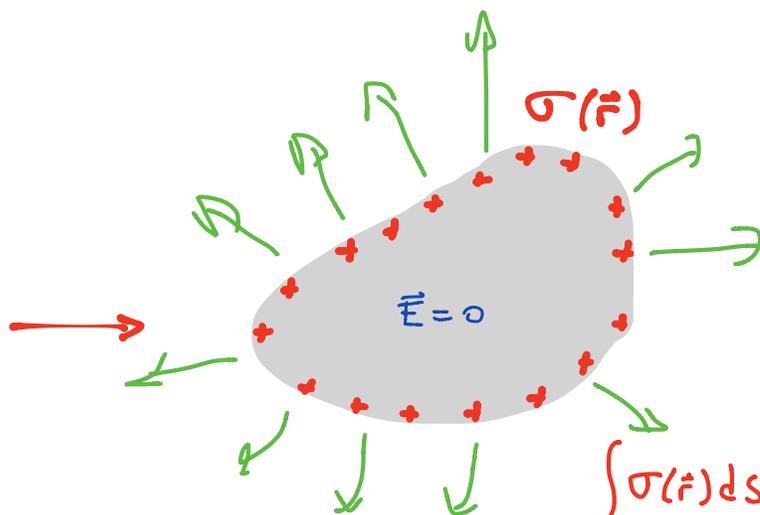
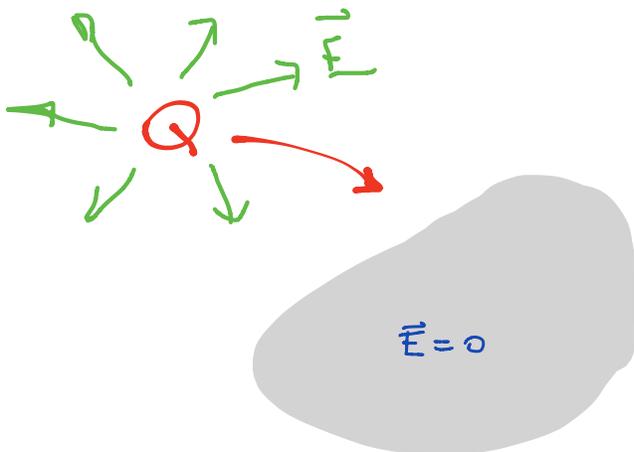
$$\vec{E} = 0$$

$$\vec{E}_{ext}$$



$$\int_{\text{Cond}} \sigma(r) ds = 0$$

\* Cargar un conductor neutro

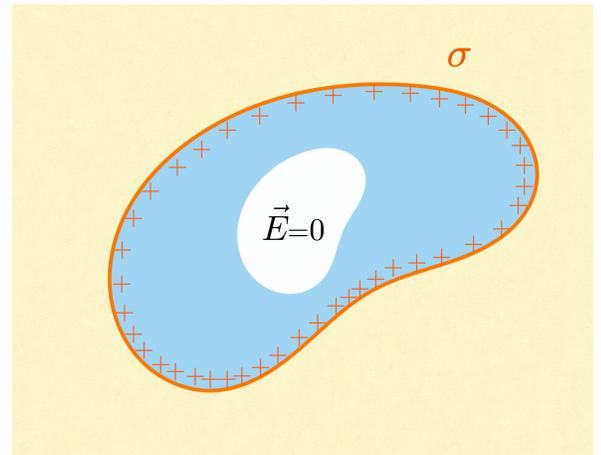
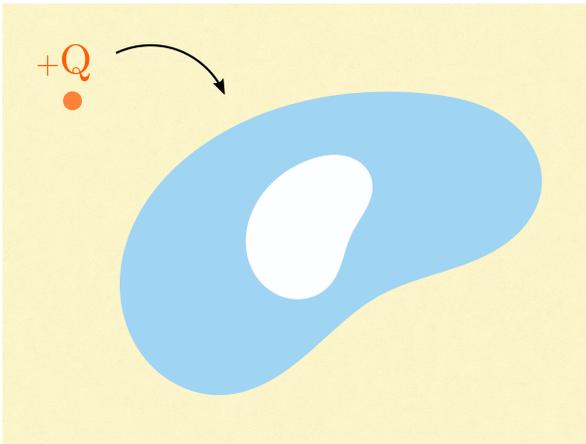


$$\int_{\text{Cond}} \sigma(r) ds = Q$$

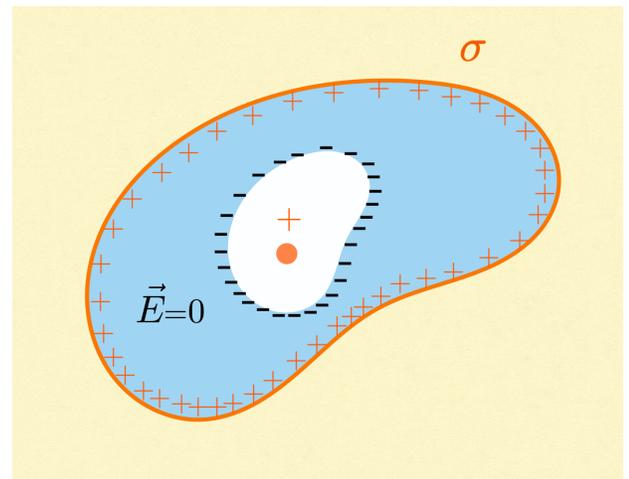
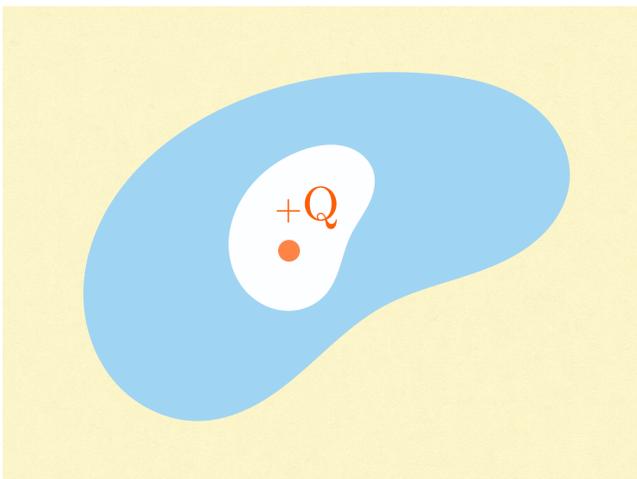
Genéricamente, el fenómeno observado se conoce como inducción de carga eléctrica (no se genera carga, sino que se redistribuye en el conductor para mantener  $\vec{E}=0$  en su interior)

## EJEMPLOS

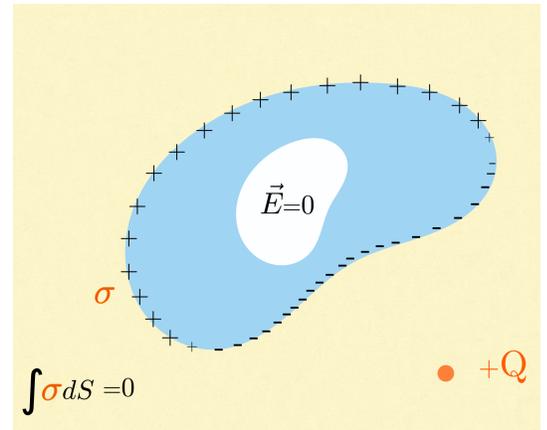
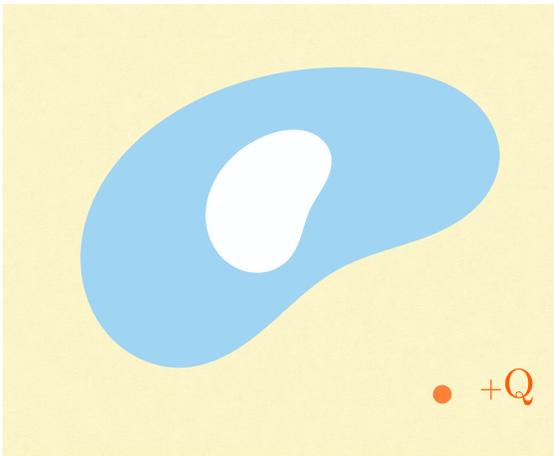
- Cargar un conductor hueco con  $+Q$



- Conductor hueco con carga en su interior



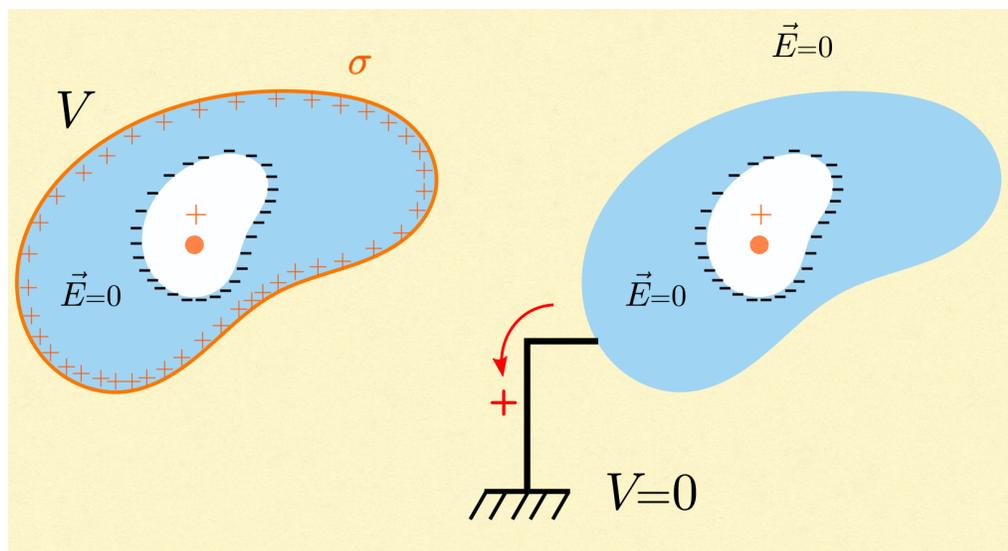
- Conductor hueco en presencia de carga eléctrica externa. - BLINDAJE ELECTROSTATICO



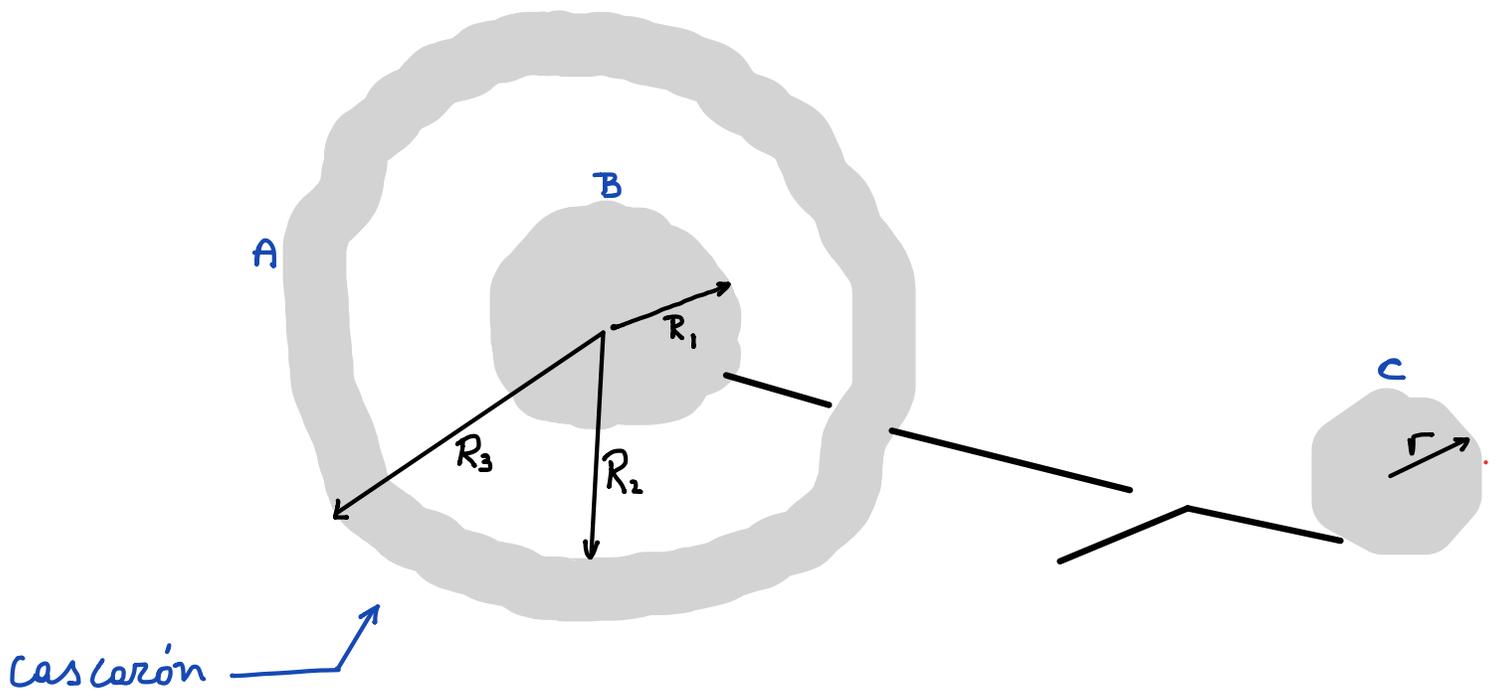
- Conexión a tierra

$$V_{\text{tierra}} = V_{\text{ref}} = 0 \quad \text{por convención}$$

Tierra  $\equiv$  Conductor ideal "infinito"  
actúa como fuente o sumidero de carga eléctrica



## PROBLEMA



B  $\equiv$  esfera conductora radio  $R_1$

A  $\equiv$  casco esférico radios  $R_2$  y  $R_3$

C  $\equiv$  esfera conductora radio  $r$  (muy alejada)

1. carga  $Q$  en B y carga  $q$  en C

Potencial eléctrico en cada conductor ?

para conductor C es simple ya que está muy alejado del resto

$$V_C \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

para otros conductores, se puede calcular el potencial a partir del conocimiento de  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = E(r) \hat{r} \quad (\text{por simetría})$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & R_2 \leq r < R_3 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_A = V_\infty - \int_\infty^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$V_B = V_A - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

2. Se conecta conductor B y C

Cual es el potencial eléctrico de A y C?

Problema: al estar conectados B y C, ambos deben tener el mismo potencial. Ésto requiere que sus cargas eléctricas se redistribuyan.

Si  $Q_B$  y  $Q_C$  son las nuevas cargas de B y C, debe cumplirse:

1) Conserv. de carga:  $Q_B + Q_C = Q + q$

2) B y C equipotenciales  $V_B = V_C$   
 $\Downarrow$

$$\frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right] = \frac{Q_C}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2 ecu  $\Rightarrow$  determinar  $Q_B$  y  $Q_C$

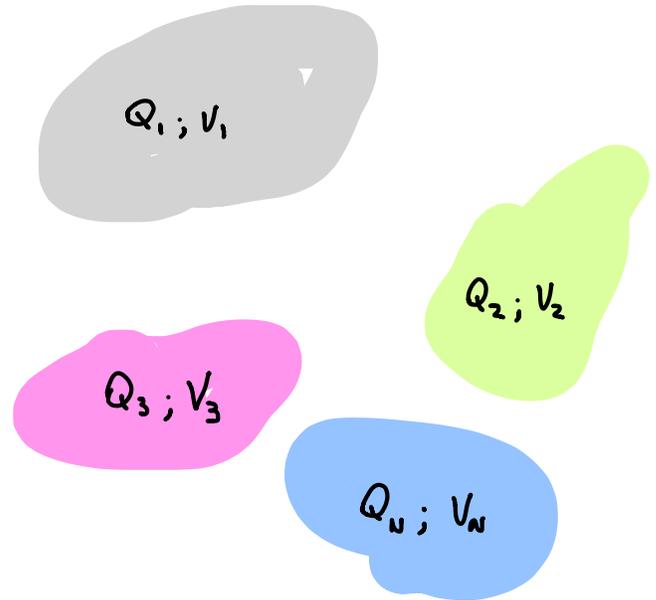
$$V_A = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$Q_B = (Q+q) \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3} + R_1 R_2 R_3$$

etc, etc!

# SISTEMAS DE CONDUCTORES

Considerar  $N$  conductores  
 $\{Q_1; V_1\}, \{Q_2; V_2\}, \dots, \{Q_N; V_N\}$



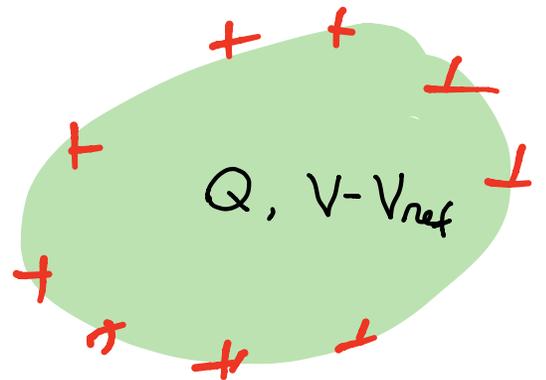
INTERÉS:

Sistema de esas características  
almacena energía (en forma de  
energía electrostática)  $\rightarrow$  la cual queda disponible para  
uso posterior

CARACTERIZACIÓN:

EJEMPLO: CASO de 1 conductor

Al cargar conductor con  $Q$ ,  
se realiza un trabajo externo que  
es almacenado en forma de energía  
electrostática y el conductor  
adquiere un potencial que, con respecto  
a un potencial de referencia es  $(V - V_{ref})$



INTERESANTE :  $V - V_{ref} \sim Q$

CAPACIDAD DEL CONDUCTOR :

$$C =: \frac{Q}{V - V_{ref}}$$

corresponde a un coeficiente de proporcionalidad entre la carga y el potencial eléctrico que el conductor adquiere

$$C = C(\text{geometría, medio})$$

$$\text{UNIDADES: } [C] = \frac{C_b}{\text{Volt}} = \underline{\text{FARAD}}$$

Ejemplo: Conductor esférico. ¿Cuál es su capacidad  $C$ ?

Para calcularlo, supongo que cargo el conductor con carga  $Q \Rightarrow$  genera un  $\vec{E}$  en todo el espacio  $\Rightarrow$  puedo calcular potencial  $V$  con respecto a un  $V_{ref} \Rightarrow$  hacer cociente  $\Rightarrow C$

$$Q \Rightarrow V - V_{ref} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

cuando  $V_{ref} = V(\infty) = 0$

( $R \equiv$  radio conductor)

$$\circ \circ \quad \underline{C = 4\pi\epsilon_0 R}$$

$\Rightarrow$  Asociado al conductor, hay un número, su capacidad, que lo define eléctricamente.

## CASO N Conductores

$$Q_i = Q_i(V_1, V_2, \dots, V_N)$$

en general:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j$$

$V_j \equiv$  potencial de cada conductor medido c/a  $V_{ref}$   
 $\hookrightarrow (V_j - V_{ref})$

$C_{ij} \equiv$  coeficientes de capacidad

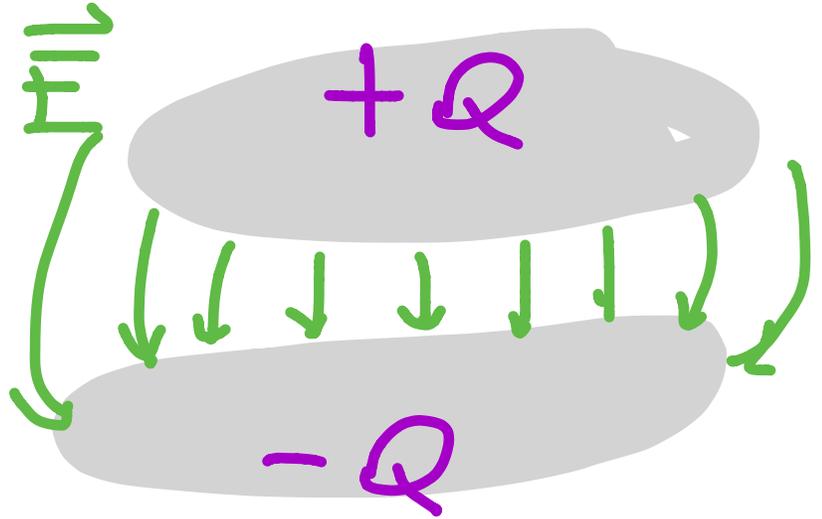
En general, un sistema queda caracterizado por estos coeficientes de capacidad (dependen sólo de la geometría y el medio donde los conductores están ubicados) y los cuales determinan la carga que el sistema puede tener para potenciales dados (o viceversa). En otras palabras, determinan la energía que el sistema de N conductores puede almacenar.

Por su importancia tecnológica, veremos un dispositivo de 2 conductores llamado CONDENSADOR

# CONDENSADOR

Sistema de 2 conductores,  
cargas  $\pm Q$

Cada conductor recibe  
el nombre de PLACAS  
del condensador



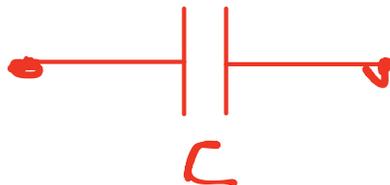
Eléctricamente, esta configuración de conductores se  
caracteriza por un coeficiente que mide la razón  
entre la magnitud de la carga en las placas y la  
diferencia de potencial entre ellas

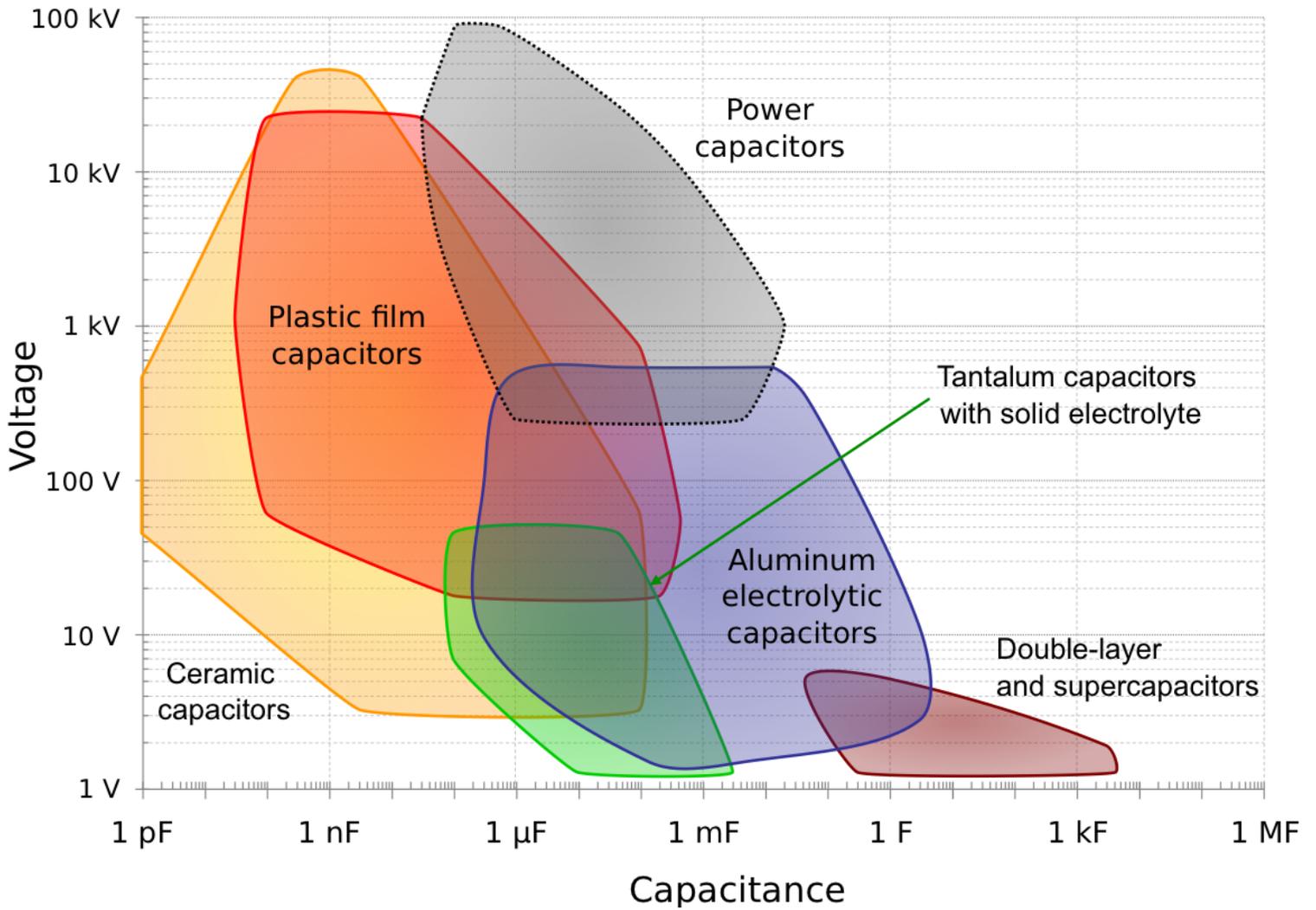
## LAPACIDAD DEL CONDENSADOR

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-}$$

$C$  depende de la geometría de los 2 conductores y del medio entre ellos. Clave para determinar la energía que el dispositivo puede almacenar.

SÍMBOLO:





# CONDENSADOR PLANO

Planos  $\infty$  (aprox)

Superficie  $A$ , separados  $d$

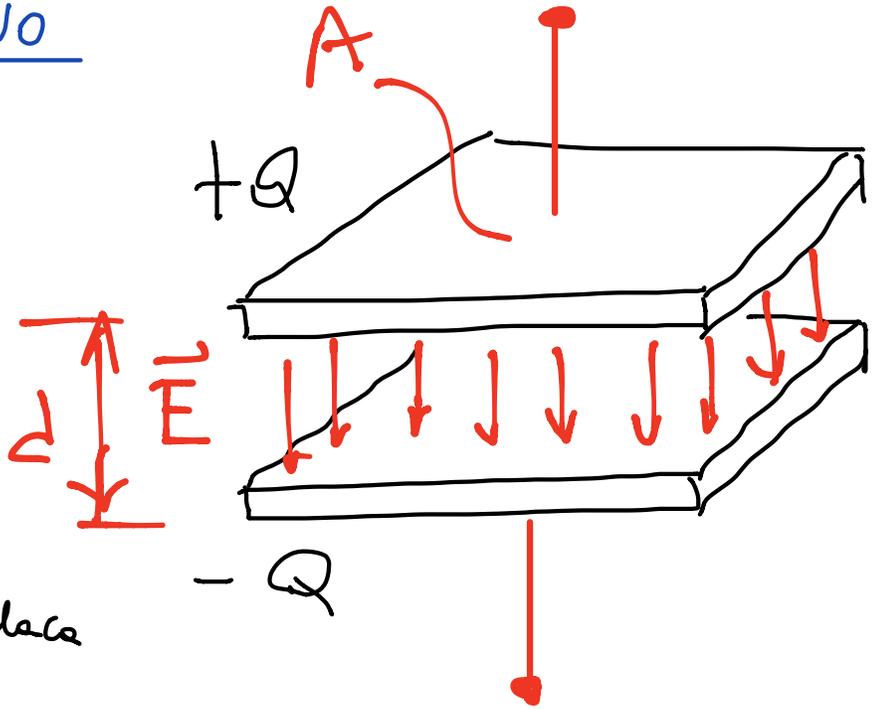
Se cargan con  $\pm Q$

$$\Rightarrow \pm \sigma = \frac{Q}{A} \text{ en cada placa}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\Rightarrow V_+ - V_- = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

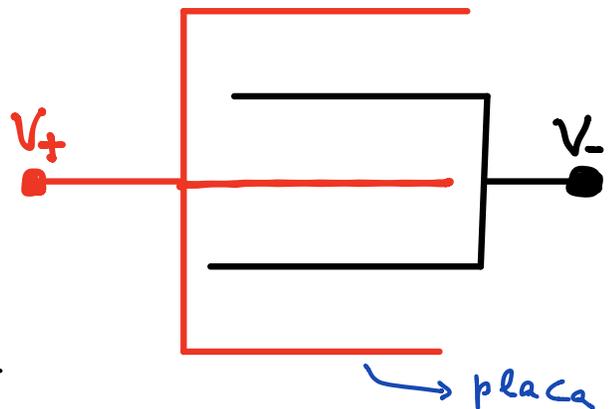
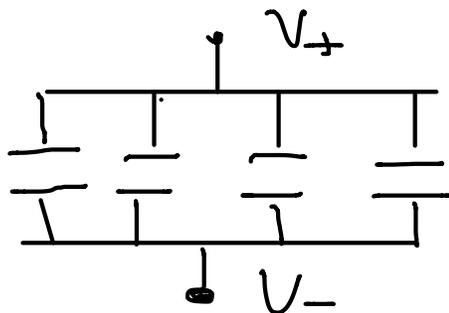


# CONDENSADOR INTERCALADO

Si condensador tiene  $n$  placas planas intercaladas, separadas " $d$ "

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} (n-1) \quad (\text{dem.})$$

Equivalente a:

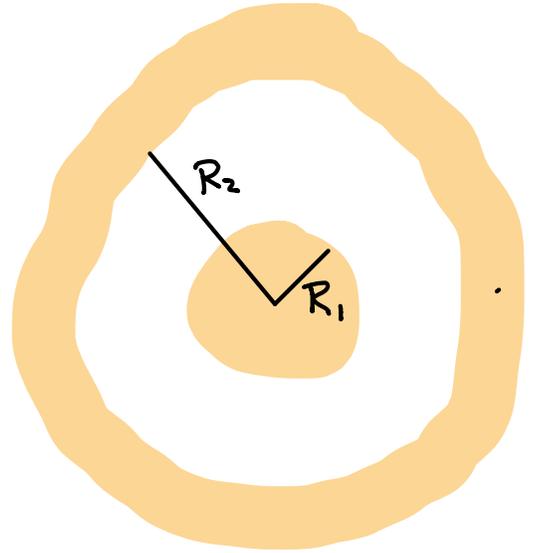


Condensadores en "paralelo"

## CONDENSADOR ESFERICO

Placas son esferas  
de radios  $R_1$  y  $R_2$

Capacidad ?



Dar carga  $Q$  esfera interior

$\Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad R_1 < r \leq R_2$$

$$V_+ - V_- = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$\Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad [F]$$

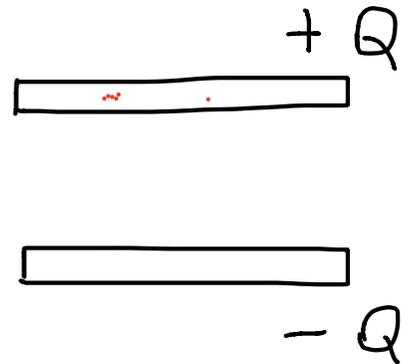
# ENERGIA EN SISTEMA DE CONDUCTORES

Un sistema de conductores almacena energía

Por ejemplo:

En condensador plano,

la energía almacenada corresponde al trabajo realizado externamente para cargar con  $\pm Q$  las placas conductoras a una diferencia de potencial  $\Delta V = V_+ - V_-$



El trabajo realizado para aumentar la carga de  $q \rightarrow q + \delta q$  para una diferencia de potencial  $\Delta V$  es:

$$\delta W = \delta q V_+ + (-\delta q) V_- = \delta q \Delta V = \delta q [V_+ - V_-]$$

$$\Rightarrow \delta W = \delta q \frac{q}{C}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C}$$

El trabajo total realizado para cargar condensador  $0 \rightarrow Q$

$$W = \int \delta W = \int_0^Q \frac{1}{C} q \delta q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$- \quad W = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

## CASO GENERAL: N Conductores

Equivalente al caso de cargas puntuales y/o distribuciones de carga

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$

$\{Q_i; V_i\}$  son la carga y potencial final en conductor  $i$

Generalización:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{todo el espacio}} |\vec{E}|^2 dV$$

## OBSERVAR:

Hay 2 formas alternativas de almacenar la energía:

a) bajo la condición  $Q_i = \text{constante}$  todo  $i$

b) bajo la condición  $V_i = \text{constante}$  todo  $i$

Ello se especifica indicando  $W_{Q=\text{cte}}$  ó  $W_{V=\text{cte}}$

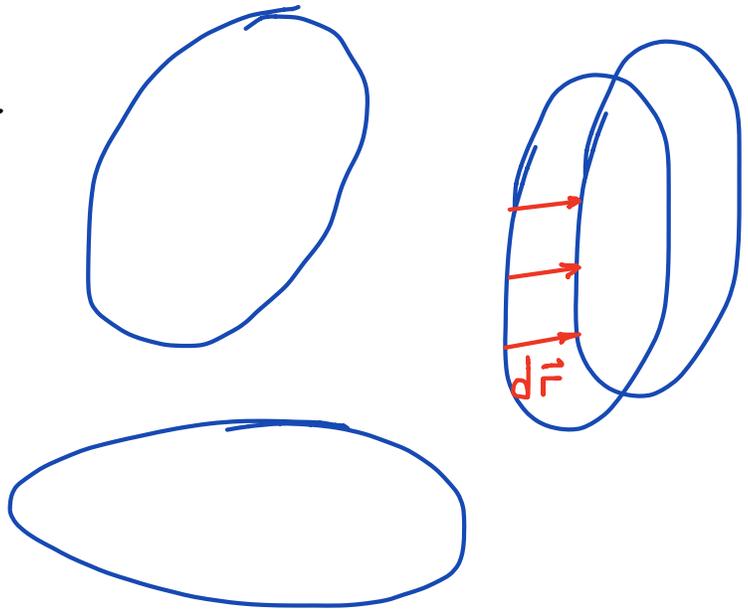
# FUERZAS ENTRE CONDUCTORES

El trabajo mecánico para desplazar un conductor en  $d\vec{r}$

$$dW_{mec} = \vec{F}_{mec} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F}_{mec} = -\vec{F}_{elec}$$

$$dW_{mec} = -\vec{F}_{elec} \cdot d\vec{r}$$



a)  $Q = cte \Rightarrow dW_{mec} = dW_Q$  (variation energía eléctrica a  $Q = cte$ )

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{elec} = -\nabla W_Q}$$

b)  $V = cte \Rightarrow dW_{mec} + dW_{Bat} = dW_V$

pero  $dW_{Bat} = \sum_i \delta q_i V_i = 2dW_V$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{elec} = +\nabla W_V}$$

## Ejemplos:

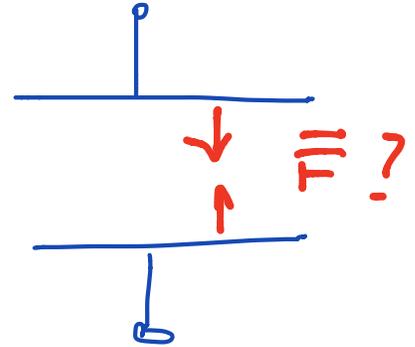
\* Calcular fuerza entre placas de un condensador plano

a)  $Q = \text{cte}$

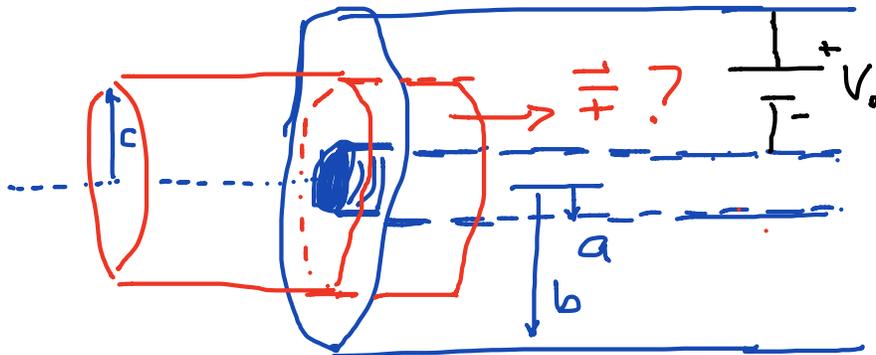
b)  $\Delta V = \text{cte}$

$$\vec{F} = \frac{1}{2} Q \left( \frac{\Delta V}{d} \right) \hat{n}$$

$$= \frac{1}{2} C \frac{(\Delta V)^2}{d} \hat{n} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C d} \hat{n}$$



→ Calcular fuerza sobre cilindro conductor que se introduce en un condensador cilíndrico conectado a una fuente externa de voltaje  $V_0$ .

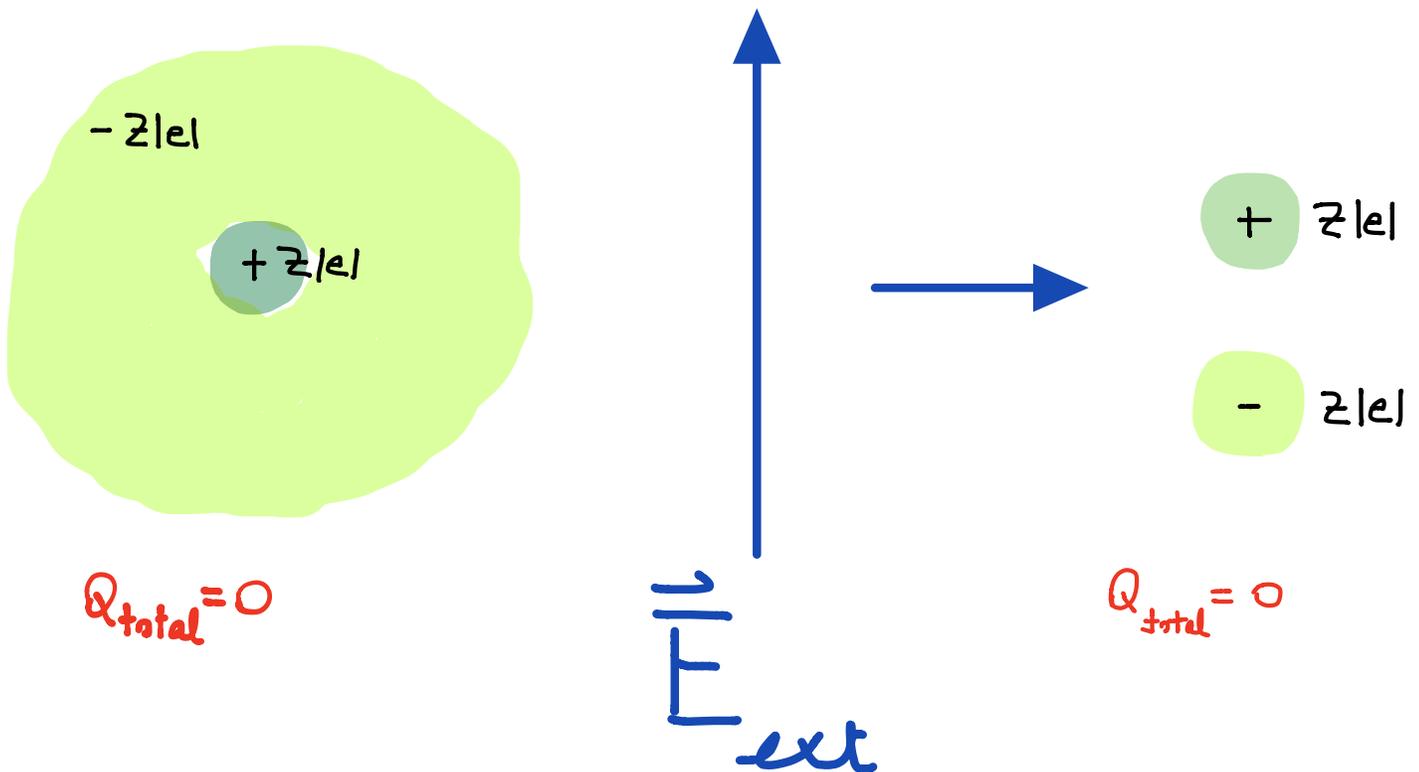


# MATERIALES DIELECTRICOS (AISLANTES)

- EJEMPLOS:
- sólidos : cerámica, papel, vidrio, plástico, etc
  - líquidos : agua destilada, aceite de transformadores, etc
  - gases : Nitrógeno, aire seco, Helio, etc

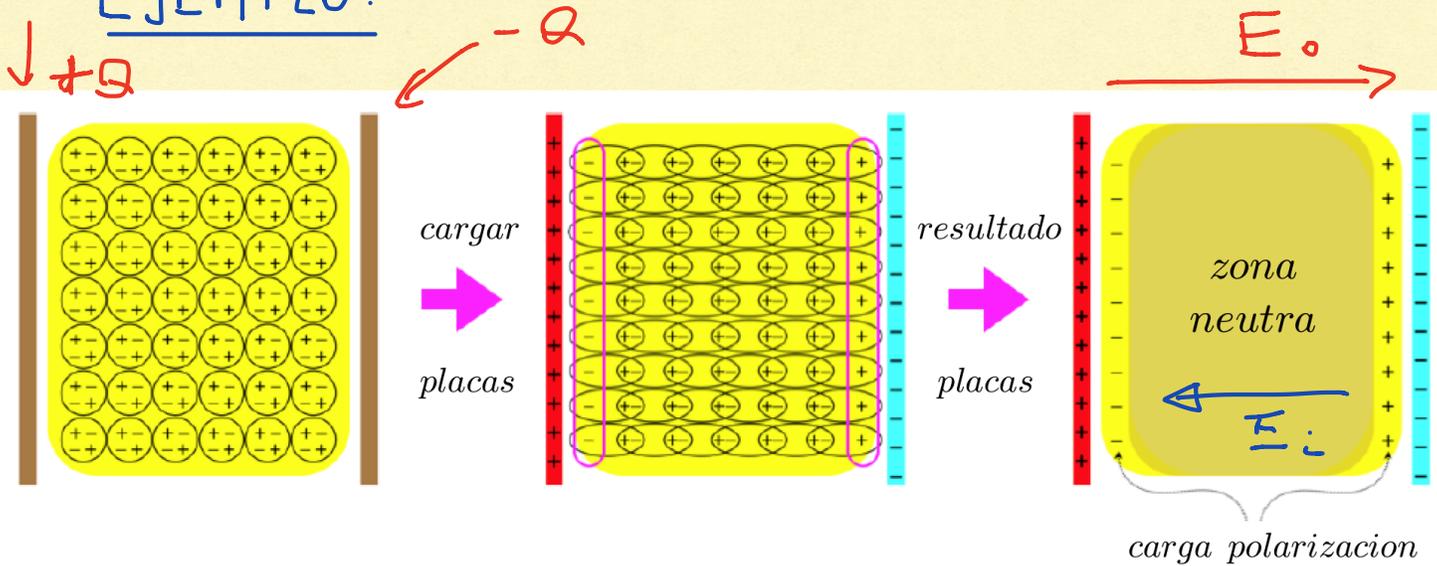
## MODELO:

dieléctrico es un medio donde las cargas eléctricas no pueden moverse libremente bajo la acción de un campo externo



ATOMOS se polarizan debido a presencia del campo externo  
 $\Rightarrow$  aparece  $\vec{p} \sim \vec{E}_{ext}$  y el  $\vec{E}_{ext}$  se modifica

## EJEMPLO:



Considerar 2 placas conductoras paralelas - condensador con un medio entre las placas (ver figura)

a) las placas se cargan;

existe un campo eléctrico entre placas que polariza (induce dipolos eléctricos en los átomos del medio); aparece un exceso de carga (del medio) en su superficie; esta carga, producto de la polarización, produce un campo eléctrico que debilita al campo original  
la diferencia de potencial entre placas disminuye con respecto a no tener material

Si  $(\Delta V)_0 \equiv$  dif. de potencial sin material

$$C_0 = \frac{Q_0}{(\Delta V)_0}$$

$$(\Delta V) < (\Delta V)_0$$

$$\text{con material} \Rightarrow C > C_0$$

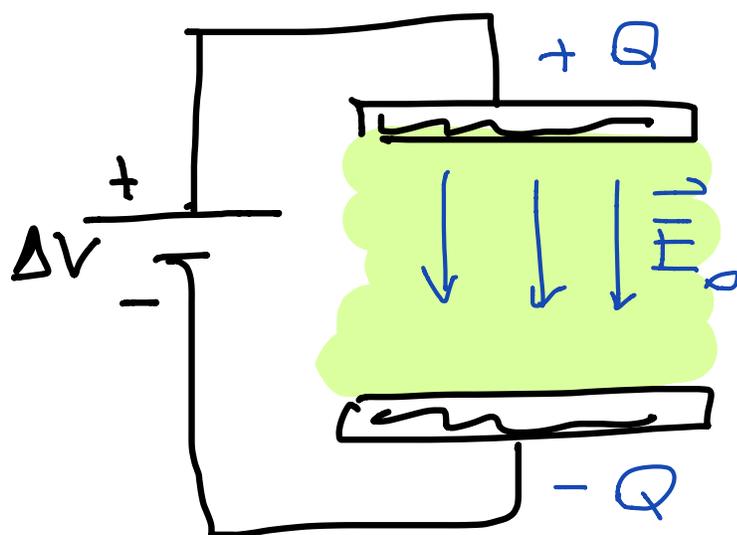
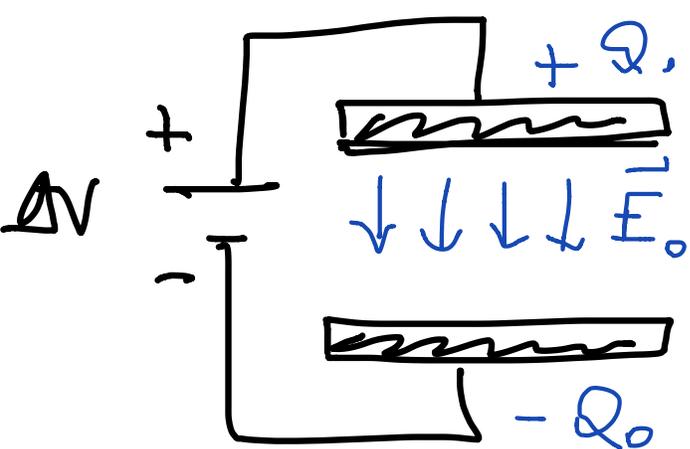
b) Diferencia de potencial  $(\Delta V) = cte$  entre placas

mismo fenómeno que tiende a debilitar el campo eléctrico entre placas

pero como la condición externa es que la diferencia de potencial se mantenga (con fuente energía externa o batería), la fuente externa aumenta la carga en las placas para compensar el debilitamiento del campo debido a la polarización del medio

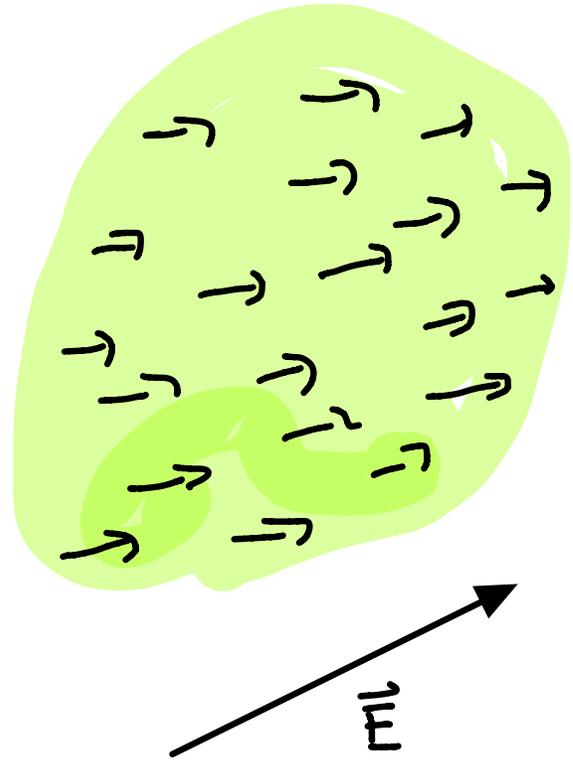
Si  $Q_0$  carga inicial

$$\Rightarrow Q \text{ carga final} > Q_0 \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} > C_0$$



# TEORIA

Debido a campos eléctricos externos, todo medio se polariza (hay materiales que tienen una polarización propia - recuerda a imanes)



## INTRODUCIR:

### VECTOR DE POLARIZACION

medida macroscópica de la cantidad de momentos dipolares eléctricos inducidos en un medio

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\epsilon_0 \Delta V} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

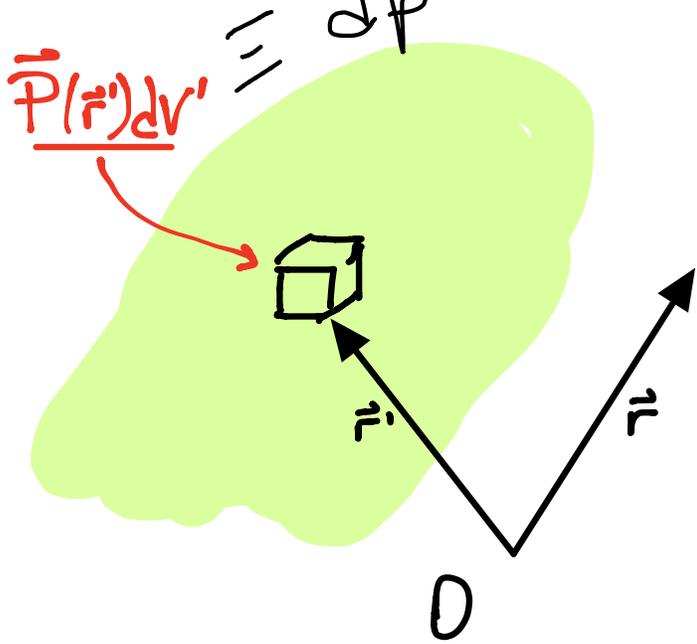
densidad de momentos dipolares por unidad de vol en el medio

En medio lineal y homogéneo,

$$\vec{P} = n \vec{p}$$

$$n = \text{densidad de átomos} \\ = \frac{\text{átomos}}{\text{volumen}}$$





En elemento de volumen del material hay una cantidad de dipolos eléctricos

$$d\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') dV'$$

que producen en el espacio un potencial eléctrico

$$V_{\text{dip}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

→

$$dV = \frac{d\vec{p}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

$$\vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \vec{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla' \cdot \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')$$

## INTRODUCIR:

densidades de carga de polarización

superficial

( $\hat{n}$ : normal a sup. material)

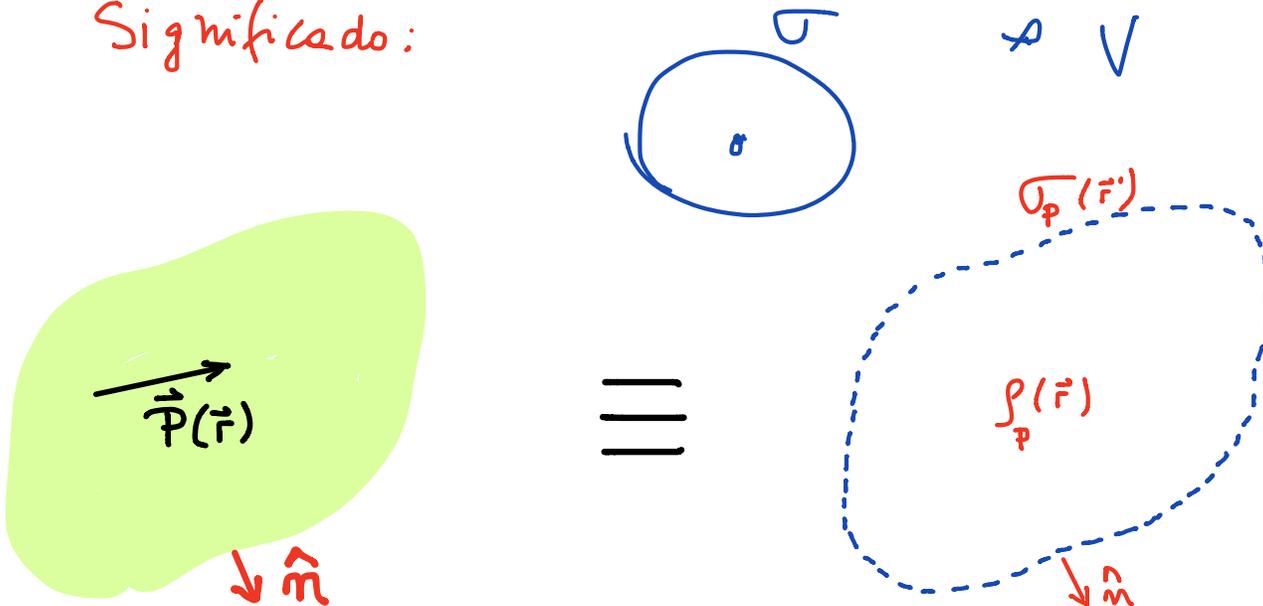
$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

volumétrica

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{\text{dielct}}} \frac{\sigma_f(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_{\text{dielct}}} \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$$

Significado:



El efecto eléctrico que produce un dieléctrico polarizado es equivalente al efecto eléctrico que producen las densidades de carga de polarización  $\sigma_p$  y  $\rho_p$ .

OBSERVAR:

$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p \neq 0 \quad \text{SIEMPRE!} \\ \rho_p \text{ depende del medio} \end{array} \right.$   
 Por ej., si  $\vec{P} = \text{constante}$   $\rho_p = 0$  en vol. del medio

# MODIFICACION ECS. DEL CAMPO ELÉCTRICO

En el vacío, en cada punto del espacio se establece una relación local entre el campo eléctrico y la carga que lo produce

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (\text{vacío})$$

donde  $\vec{E}_0$  es campo en el vacío producido por carga  $\rho_e$  (carga libre - no hay otra)

Ahora, si existe un medio dieléctrico en el punto donde existe  $\rho_e \Rightarrow$  modificación del campo eléctrico

$$\vec{E}_0 \longrightarrow \vec{E} \text{ tal que } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_e + \rho_p)$$

la fuente del campo eléctrico  $\vec{E}$  son las cargas libres y las cargas de polarización

$$\text{pero } \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot [\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}] = \rho_e$$

INTRODUCIR:

$$\boxed{\vec{D} =: \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

Vector  
Desplazamiento

con lo cual:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l$$

1ª ec. Maxwell  
en presencia del medio



teo. de Gauss:

$$\oint_{S(r)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l$$

↳ carga libre en vol V

DESTACA:  $\vec{D}$  empieza y termina en cargas libres

$\vec{E}$  empieza y termina en cargas libres y de polarización

# ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL MEDIO

IDEA: Establecer una relación entre el campo eléctrico y la Polarización del medio.

Fenomenológicamente,

se puede establecer que en un medio isotrópico y homogéneo,

$$\underline{\vec{P}} \parallel \underline{\vec{E}}$$

Introducir:  $\underline{\vec{P}} = \chi_e \epsilon_0 \underline{\vec{E}}$

$\chi_e$  = susceptibilidad eléctrica del medio  
( $\chi_e = 0$  en vacío)

$$\Rightarrow \underline{\vec{D}} = \epsilon_0 \underline{\vec{E}} + \epsilon_0 \chi_e \underline{\vec{E}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{\vec{E}}$$

Para  $\chi_e \neq \chi(E)$  pero si puede ocurrir que  $\chi_e = \chi_e(\vec{r})$

Se define:  $\epsilon =: \epsilon_0 (1 + \chi_e)$  = permitividad del medio

con lo cual  $\boxed{\underline{\vec{D}} = \epsilon \underline{\vec{E}}}$   $\epsilon = \epsilon(\vec{r})$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot (\epsilon \underline{\vec{E}}) = \rho_l} \quad \xleftrightarrow{\substack{\text{si } \epsilon \\ \text{cte}}} \quad \boxed{\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho_l}{\epsilon}}$$

También se usa la permitividad relativa (al ratio) del material,

$$\underline{\epsilon_r =: \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e \geq 1}$$

que también recibe el nombre de Constante dieléctrica del medio.  $\epsilon_r$  es adimensional;  $\epsilon$  tiene las dimensiones de  $\epsilon_0$

Valores típicos de  $\epsilon_r$ :

Teflón	$\sim 2$	} Valores típicos
Neopren	$\sim 6$	
Vidrio	$\sim 5 - 10$	
Agua destil.	$\sim 80$	

$\epsilon_r$  depende de la frecuencia de los campos eléctricos  
y de las no-linealidades del dieléctrico

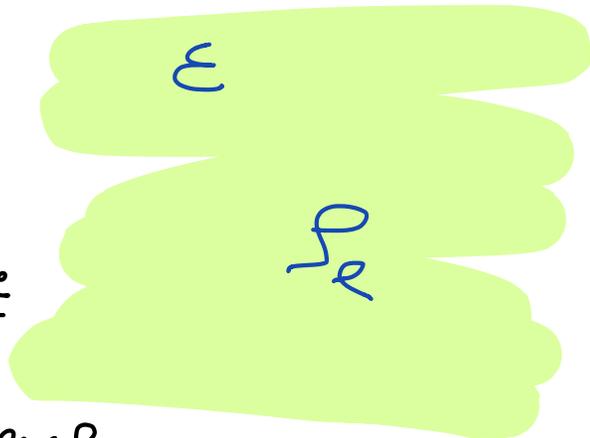
# RELACION ENTRE DENSIDADES DE CARGA: LIBRES Y POLARIZACION

\* En medio dieléctrico lineal e isotrópico

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \rho_l \quad \text{si } \epsilon = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \rho_p + \rho_l = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \rho_l < \rho_l \Rightarrow \rho_p \neq \text{signo que } \rho_l$$

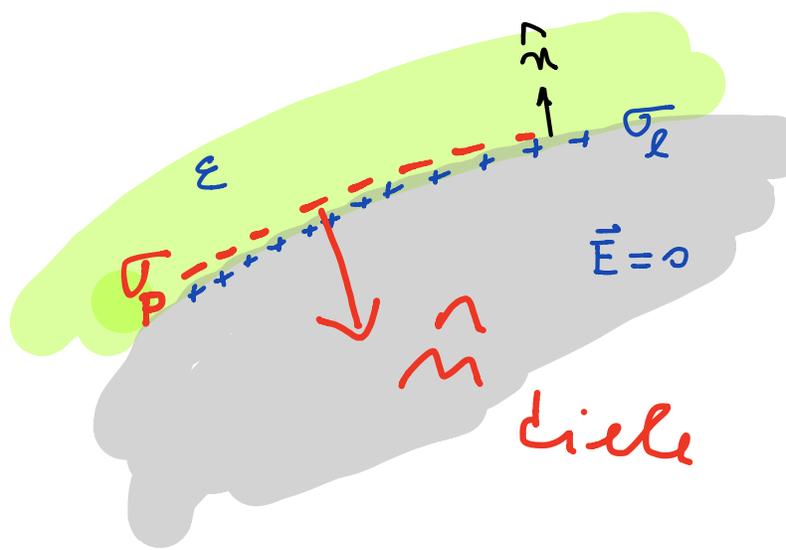


\* En interfaz conductor - dieléctrico

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} + \vec{P} \quad / \cdot \hat{n}$$

$$\sigma_l = \epsilon_0 \left( \frac{\sigma_l}{\epsilon} \right) - \sigma_p$$

$$\sigma_l + \sigma_p = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \sigma_l < \sigma_l$$



$\sigma_p$  tiene signo diferente a  $\sigma_l$  en la superficie

EJEMPLO : Carga puntual rodeada por medio de permitividad  $\epsilon$

Dielectrico es neutro

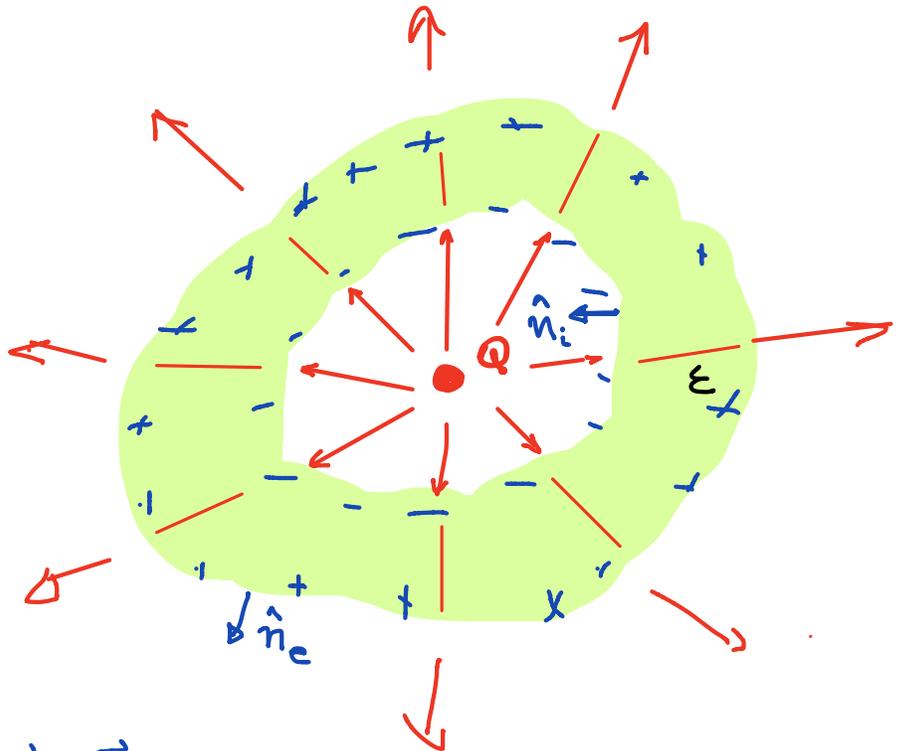
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e$$

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

en hueco:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D}(\vec{r})$

en dielectrico :  $\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}(\vec{r})$  si  $\epsilon$  es constante

fuera dielectrico:  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D}(\vec{r})$



El vector desplazamiento  $\vec{D}$  tiene simetria esferica,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$$

Densidades de carga de polarización:

en el medio:  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) E(r) \hat{r}$

$$\Rightarrow \sigma_p^{(int)} = \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \hat{n}_i$$

$$\sigma_p^{(ext)} = \vec{P}(\vec{r}_e) \cdot \hat{n}_e$$

$$\rho_p = 0$$

EJEMPLO: Capacidad de un condensador plano que tiene una permitividad que cambia con la distancia entre placas

Cargar condensador con  $\pm Q$

$$\Rightarrow \pm \sigma = \frac{\pm Q}{A}$$

$$\circ \circ \vec{D} = \sigma \hat{x}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon(x)} \vec{D}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon(1+\beta x)}$$

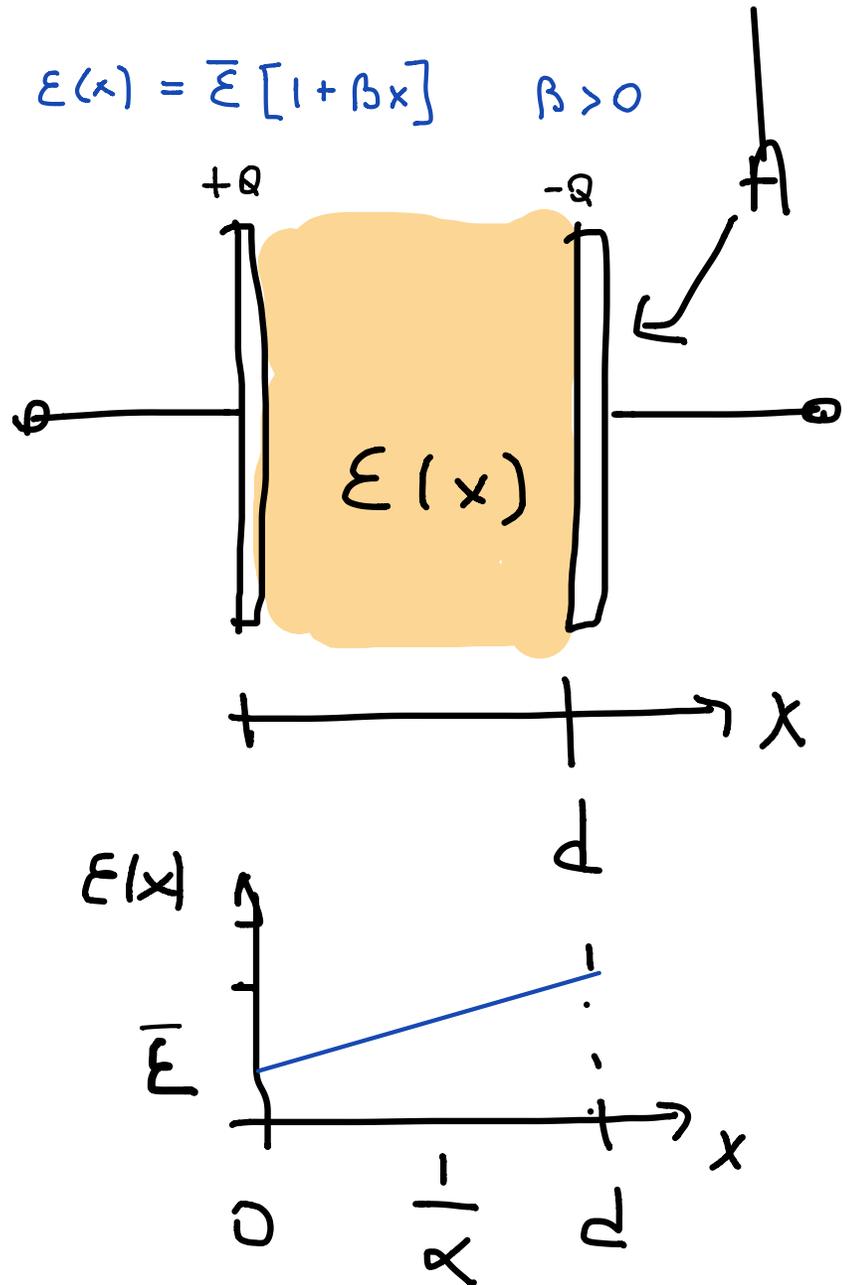
Diferencia de potencial entre placas:

$$V_+ - V_- = - \int_d^0 \vec{E}(x) \cdot d\vec{x} = \int_0^d \frac{\sigma dx}{\epsilon(1+\beta x)}$$

$$V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\epsilon \beta} \ln(1+\beta d) \xrightarrow{\beta \sim 0} \frac{\sigma}{\epsilon} d$$

$$C = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{\bar{\epsilon} \beta A}{\ln(1+\beta d)} \xrightarrow{\beta \sim 0}$$

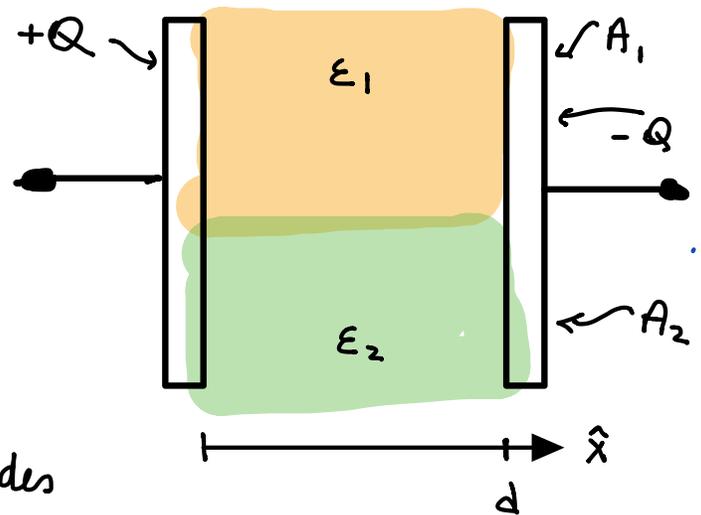
$$\bar{\epsilon} \frac{A}{d} = \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon_0} \right) \overset{\downarrow}{C_0} \text{ Capacidad sin dieléctrico}$$



EJEMPLO : Capacidad de condensador plano con 2 dieléctricos

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$A_1 + A_2 = A \equiv \text{área total placa}$$



Al cargar la placa, aparece densidades de carga  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  frente a cada dieléctrico

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A_1} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = Q \quad || (1)$$

Bajo suposición de placas muy grandes con respecto a distancia de separación  $d$ ,

$$\Rightarrow \vec{D}_1 = \sigma_1 \hat{x} \quad ; \quad \vec{D}_2 = \sigma_2 \hat{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \hat{x} \quad \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \hat{x}$$

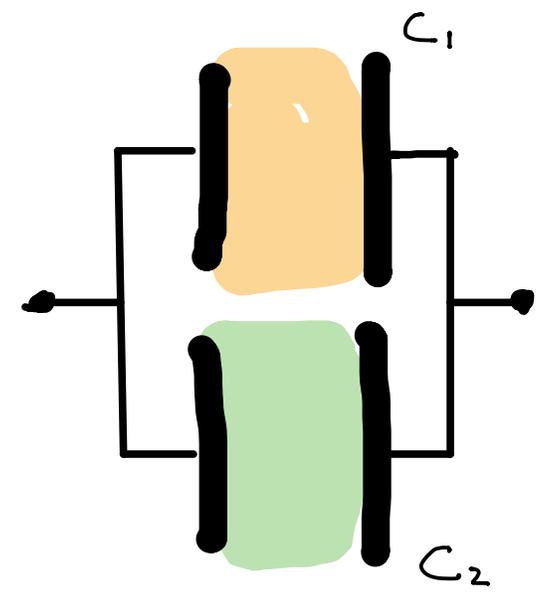
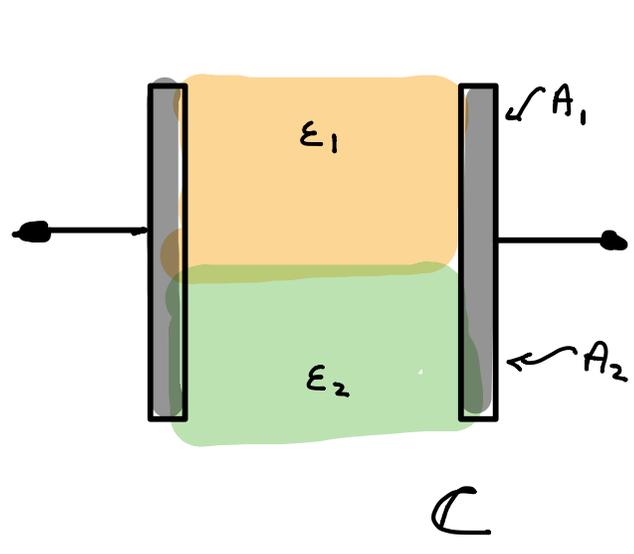
y la diferencia de potencial  $\Delta V = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} d = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} d \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \quad || (2)$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2} Q$$

con lo cual  $C = \frac{(\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2)}{d} \xrightarrow{A_1 = A_2 = \frac{A}{2}} \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) A}{2d} \xrightarrow{\epsilon_1 = \epsilon_2} \frac{\epsilon A}{d}$

OBSERVAR:  $C = C_1 + C_2$  con  $C_i = \frac{\epsilon_i A_i}{d}$

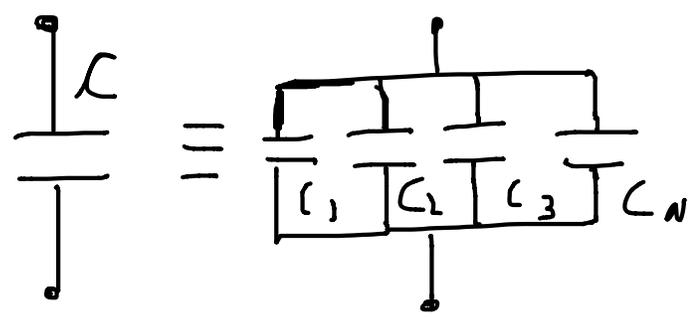
Corresponde a la capacidad equivalente de 2 condensadores de capacidades  $C_1, C_2$  conectados en paralelo



CONEXIÓN Condensadores

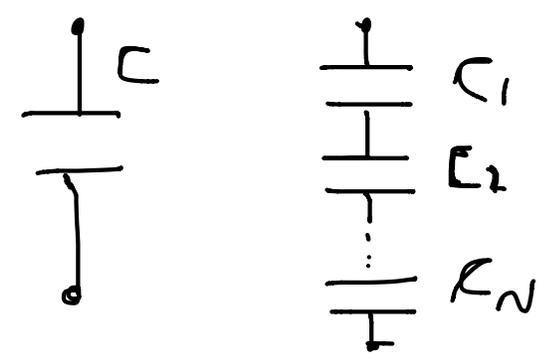
Paralelo

$$C = \sum_{i=1}^N C_i$$



Serie

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{C_i}\right)$$



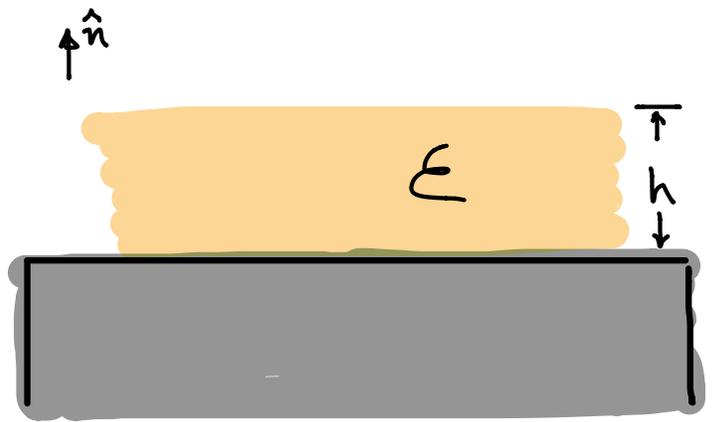
EJEMPLO: Un conductor con densidad de carga  $\sigma$  en su superficie (grandes dimensiones). Sobre él se coloca placa de material dieléctrico de permitividad  $\epsilon$

- $\vec{E}$  todo el espacio
- densidades de carga de polarización
- el bloque dieléctrico se desplaza altura "d" sobre conductor  $\rightarrow$  cambian respuestas propias?

a)  $\vec{D} = \sigma \hat{n}$

en dieléct.  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon} \hat{n}$

fuera:  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$



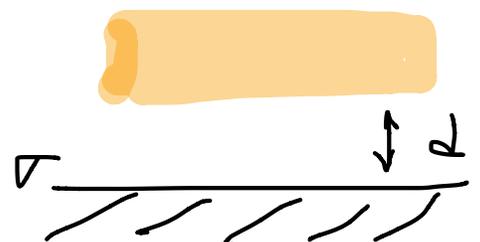
b)  $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \sim \nabla \cdot \vec{E} = 0$  en dieléctricos

$[\sigma_p]_{\text{en cond}} = -\vec{P} \cdot \hat{n}$        $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

$[\sigma_p]_{\text{en cond}} = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\sigma}{\epsilon} = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \sigma$

$[\sigma_p]_{\text{aire}} = -[\sigma_p]_{\text{en cond}}$

c) dieléctrico se mueve



nada o curra !!  $\vec{E}$  es uniforme!

# CONDICIONES DE BORDE

PROBLEMA: ¿qué ocurre al campo eléctrico al pasar de un medio a otro?

Lo que sucede es que  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  no pueden tomar cualquier dirección al cambiar. Su comportamiento debe ser consistente con las ecuaciones que los describen:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= \rho_e && \text{(carga libre)} \\ \nabla \times \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

+ la relación que prescribe la relación entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ :

Ecuación constitutiva del medio:  $\vec{D} = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}$

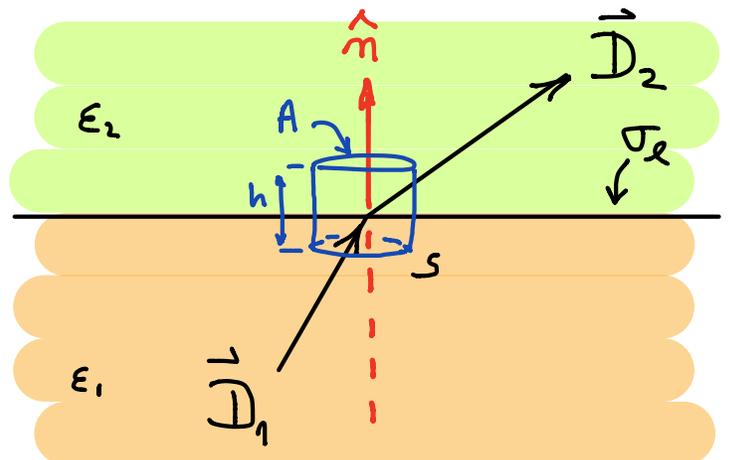
\* Restricciones para  $\vec{D}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e$$

$$\text{Gauss: } \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \rho_e dV = \sigma_e A$$

$$\vec{D}_1 \cdot (-A\hat{n}) + \vec{D}_2 \cdot (A\hat{n}) = \sigma_e A$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = \sigma_e}$$



en superficie de separación

Existe una discontinuidad de la componente normal del vector desplazamiento, dada por la densidad de carga libre que podría existir en superficie de separación:

$$\underline{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_l} \quad \vec{D}_i \cdot \hat{n} = \vec{D}_i \cdot \hat{n}$$

Si  $\sigma_l = 0$   $\Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$   
se conservan las componentes normales

En términos de los campos  $\Rightarrow \underline{\epsilon_2 \vec{E}_{2n} - \epsilon_1 \vec{E}_{1n} = \sigma_l}$

Aplicación: medio "1" es un conductor  $\Rightarrow \vec{E}_1 = 0$

Luego,  $D_{2n} = \sigma_l \rightarrow \vec{E}_{2n} = \frac{\sigma_l}{\epsilon_2} \hat{n}$

resultado conocido!

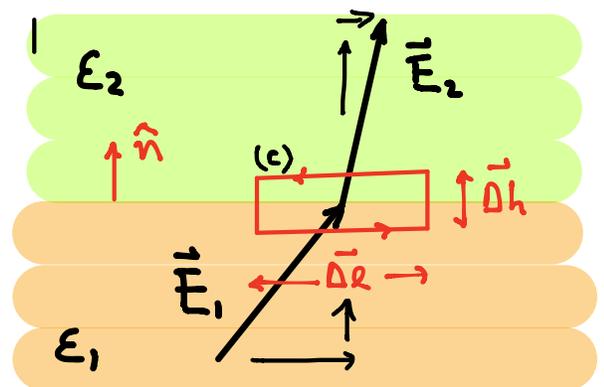
\* Restricciones para  $\vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\hat{n} \times [\vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}}$$

Se conservan las componentes tangenciales a la superficie



CONCLUSIÓN: El campo eléctrico sufre una refracción (cambio de dirección) al pasar de un medio a otro

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$\Downarrow$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

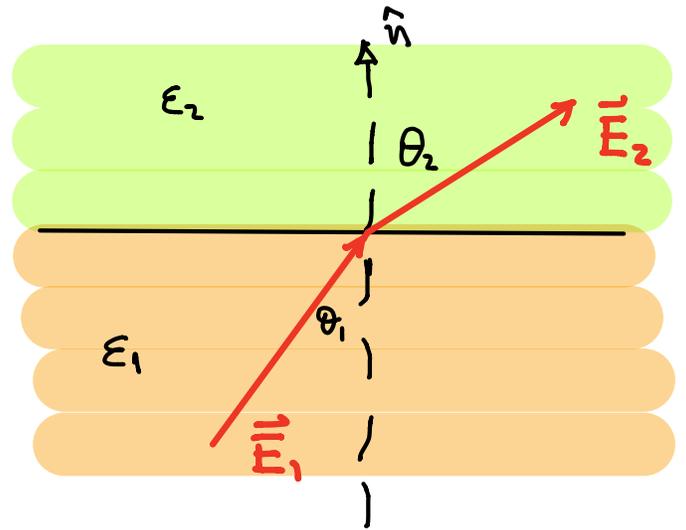
---


$$\frac{1}{\epsilon_1} \tan \theta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \tan \theta_2$$


---

Si  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (agua  $\rightarrow$  aire)  $\theta_2 < \theta_1$

Si  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (aire  $\rightarrow$  agua)  $\theta_2 > \theta_1$

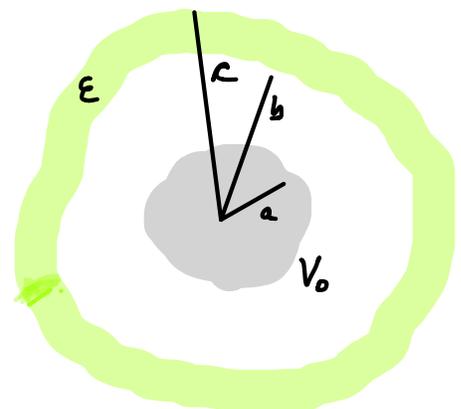


EJEMPLO: Calcular potencial eléctrico en todo el espacio.

Determinar cargas de polarización.

Sistema: conductor esférico radio  $a$  con potencial  $V_0$ , rodeado de capa dieléctrica,  $\epsilon$ , radios  $b$  y  $c$

Suponer que existe carga  $Q$  en conductor interior



$\Rightarrow$  todo el espacio  $\vec{D} = D(r) \hat{r}$

$$\text{con } D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

expresando  $Q$  en función de  $D = \epsilon_0 E$

$$Q = \sigma 4\pi a^2 = D(a) 4\pi a^2 = 4\pi \epsilon_0 a^2 E(a)$$

$$\Rightarrow D(r) = \epsilon_0 \frac{a^2}{r^2} E(a)$$

Entonces:

$$a \leq r \leq b \quad E(r) = \frac{a^2}{r^2} E(a)$$

$$a \leq r \leq c \quad E(r) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left( \frac{a^2}{r^2} \right) E(a)$$

$$r \geq c \quad E(r) = \frac{a^2}{r^2} E(a)$$

Hemos usado:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

en cada sup. de separación

$$E_{1t} = E_{2t} = 0$$

Potenciales:

$$r \geq c \quad V(r) = a^2 E(a) \left[ \frac{1}{r} \right]$$

$$b \leq r \leq c \quad V(r) = \frac{a^2}{c} E(a) + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} a^2 E(a) \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right]$$

$$= a^2 E(a) \left[ \frac{\epsilon - \epsilon_0}{r c \epsilon} \right] + \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$$

$$a \leq r \leq b \quad V(r) = a^2 E(a) \left[ \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon c} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon b} \right] + a^2 E(a) \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right]$$

$$V(r) = a^2 E(a) \left[ \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon c} + \frac{\epsilon_0}{\epsilon b} + \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right]$$

$$V(r=a) = V_0 = a^2 E(a) \left[ \frac{1}{c} \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) - \frac{1}{b} \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) + \frac{1}{a} \right]$$

$$a^2 \bar{E}(a) = \frac{V_0}{\frac{1}{a} - (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon})(\frac{1}{b} - \frac{1}{c})}$$

lo cual resuelve el problema.

Longitudinal polarización  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

$$\begin{aligned}\sigma_p(r=b) &= \vec{P}(r=b) \cdot (-\hat{r}) = -[\epsilon - \epsilon_0] E(b) \\ &= -[\epsilon - \epsilon_0] \frac{a^2}{b^2} E(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p(r=c) &= \vec{P}(r=c) \cdot (\hat{r}) = [\epsilon - \epsilon_0] E(c) \\ &= [\epsilon - \epsilon_0] \frac{a^2}{c^2} E(a)\end{aligned}$$

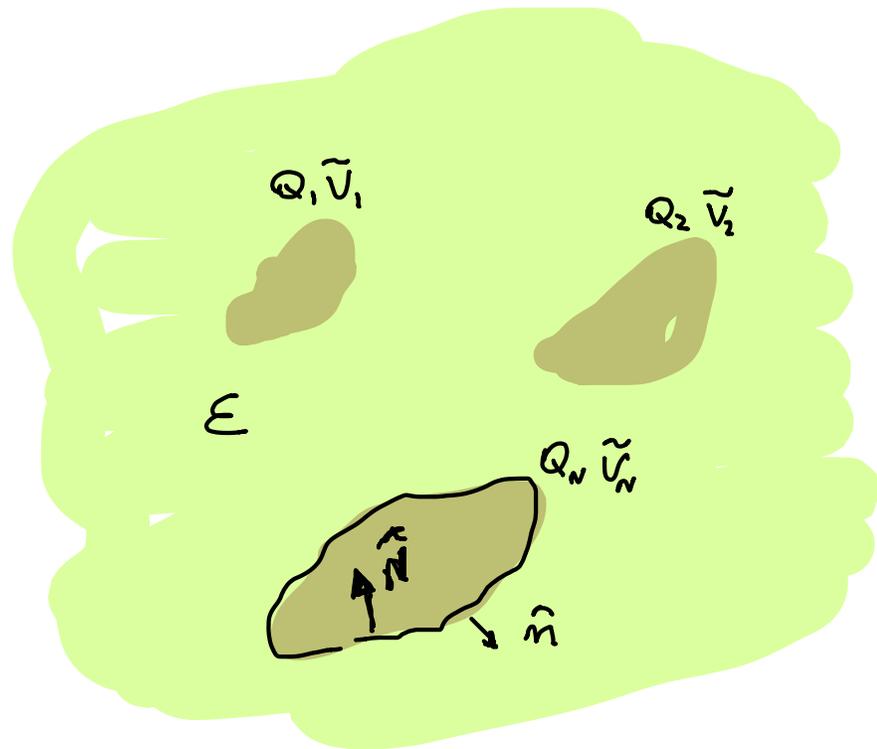
Verificar:  $\int \sigma_p(b) dS_b + \int \sigma_p(c) dS_c = 0$

# ENERGIA EN DIELECTRICOS

Recordar:

la energía almacenada  
en sistema de  $N$  conductores  
en el vacío

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i V_i$$
$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{todo el espacio}} \|\vec{E}\|^2 dV$$



En presencia de material dieléctrico:

Cargar conductor con carga  $Q_i \rightarrow$  significan que  
ellos adquieren un potencial eléctrico  $\tilde{V}_i > V_i$

debido al trabajo adicional que es necesario realizar para  
polarizar el medio.

La energía eléctrica almacenada ahora será

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N Q_i \tilde{V}_i$$

$Q_i \equiv$  carga libre en  
cada conductor

en forma integral: 
$$W_e = \frac{1}{2} \oint_{S \text{ todos los conductores}} \sigma(\vec{r}') \tilde{V}(\vec{r}') dS'$$

pero:  $\sigma = \vec{D} \cdot \hat{n}$        $\hat{n} \equiv$  normal a conductores

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2} \oint_{S \text{ conductores}} \vec{D}(\vec{r}') \cdot \hat{n} \tilde{V}(\vec{r}') dS' = - \frac{1}{2} \oint_{S \text{ dieléctricos}} \vec{D}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' \tilde{V}(\vec{r}')$$

$d\vec{S}' = dS' \hat{N}$     ( $\hat{N} = -\hat{n}$ )

$$W_e = - \frac{1}{2} \int_{\text{todo espacio}} \nabla \cdot (\tilde{V} \vec{D}) d\tau$$

$$\nabla \cdot (\tilde{V} \vec{D}) = \underbrace{\nabla \tilde{V} \cdot \vec{D}}_{-\vec{E}} + \tilde{V} \underbrace{\nabla \cdot \vec{D}}_0 \quad (\text{no hay carga libre en el medio})$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \vec{E} \cdot \vec{D} d\tau$$

densidad de energía eléctrica

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \Rightarrow \quad W_e = \int_{\text{todo el espacio}} w_e d\tau$$

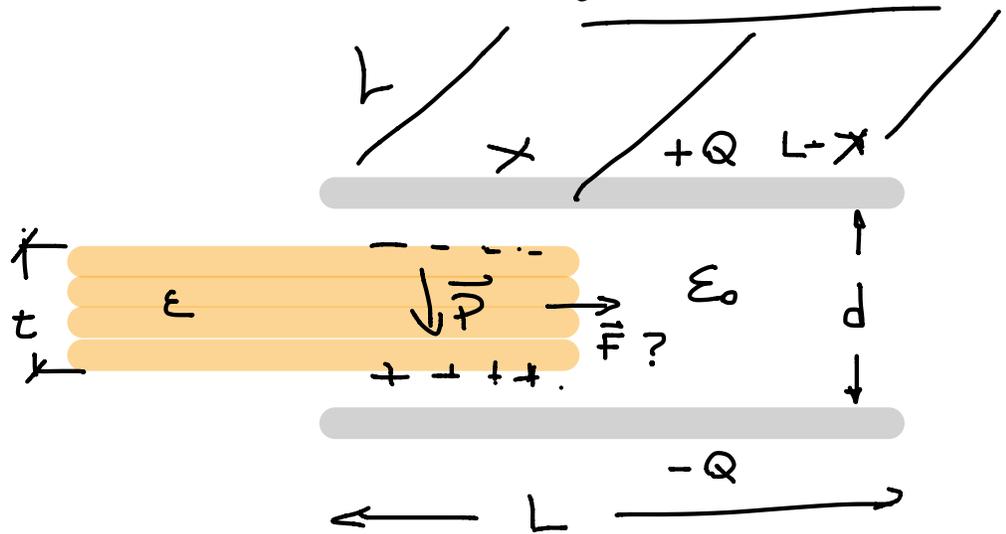
## FUERZAS

A partir del conocimiento de la energía almacenada en un sistema, se puede calcular las fuerzas

$$\underline{\vec{F}} = -\nabla W_{Q=cte}$$

$$\underline{\vec{F}} = +\nabla W_{V=cte}$$

EJEMPLO : Calcular la fuerza de atracción sobre placa de material aislante  $\epsilon$  entre placas planas conductoras cargadas con  $\pm Q$



Suponer placas y dieléctricos de superficies  $A$  muy grandes

Puede calcular la energía a partir de conocer  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$

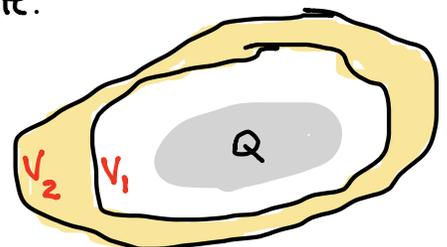
Alternativamente, a partir de conocer la capacidad del sistema

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \nabla C$$

EJEMPLO:

Conductor con carga  $Q$  y se conocen en el vacío y se conocen 2 superficies equipotenciales  $V_1$  y  $V_2$ . El espacio entre superficies equipot. se llena de dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  constante.

Calcular energía gastada en polarizar el dieléctrico



# CORRIENTES ESTACIONARIAS

# CORRIENTES ELÉCTRICAS

FENÓMENO: Conducción eléctrica

(cargas eléctricas) + ( $\vec{E}$ )  $\Rightarrow$  movimiento  
debido a la presencia de  $\vec{F}$

cargas en movimiento  $\equiv$  corriente eléctrica

El fenómeno de conducción eléctrica se cuantifica contando la cantidad de carga neta que pasa por un punto en el espacio. Se identifica por

---

$$\text{Intensidad} \equiv I(t) = \frac{dq}{dt} \quad q(t) \equiv \text{carga neta}$$

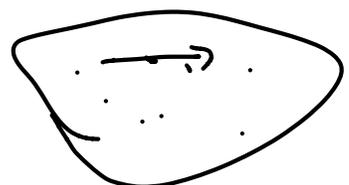
---

Unidades:

$$[I] = \frac{C}{s} \equiv A \quad [\text{Ampère}]$$

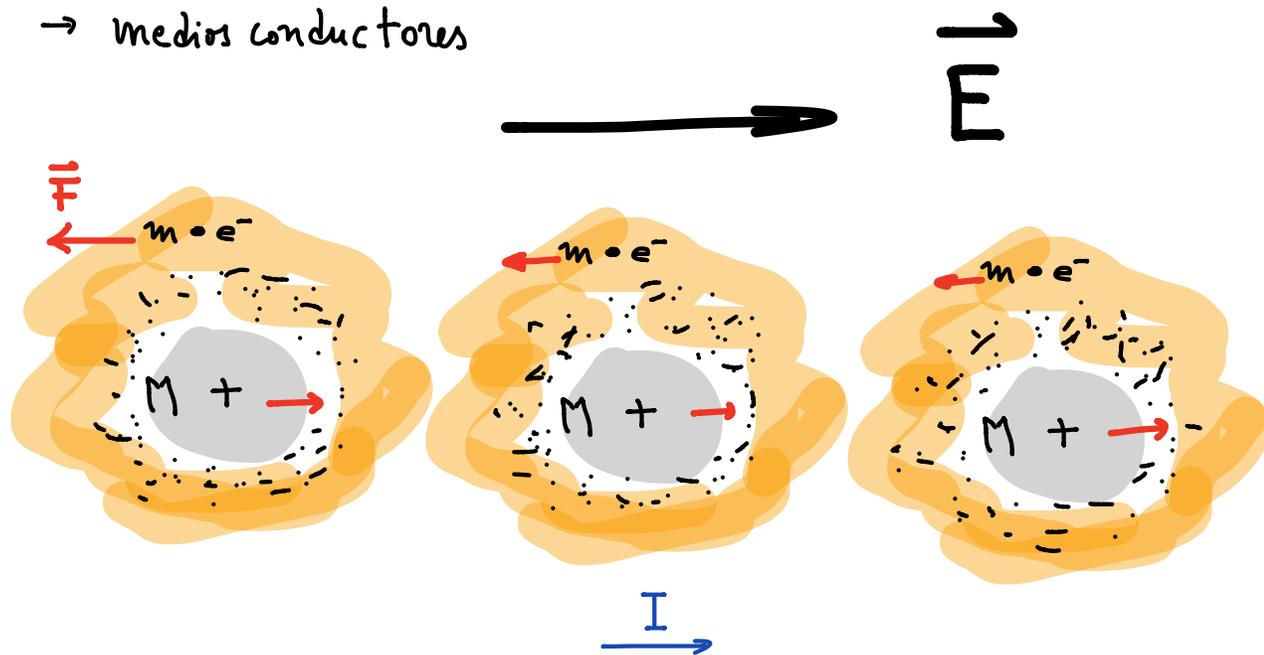
Condiciones para que exista una corriente eléctrica:

- \* portadores de carga
- \* fuente de energía externa que genere el  $\vec{E}$  que mueve la carga



# Naturaleza del fenómeno de conducción:

→ medios conductores

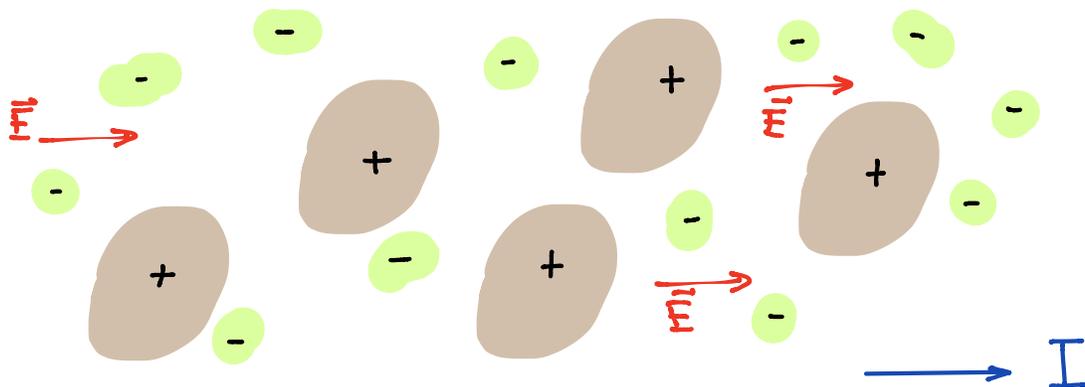


$M \gg m$

Carga (+) tiende a permanecer fija en red cristalina que da la estructura al material  $|\vec{a}_M| \ll |\vec{a}_m|$   
los electrones de conducción contribuyen mayoritariamente a la corriente  $I$

CONVENCIÓN: sentido de circulación de la corriente  
corresponde a dirección del movimiento de carga (+) !

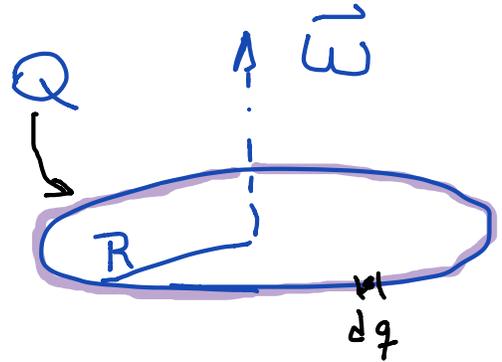
→ electrolitos o gases ionizados



## EJEMPLO :

delgado  
Anillo plástico circular está uniformemente cargado con carga  $Q$ . El disco rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . ¿Cuál es  $I$  asociada a las cargas en movimiento?

La corriente  $I$  mide la carga que pasa por unidad de tiempo en un punto dado



El elemento de carga en un punto del anillo es

$$dq = \lambda ds$$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$ds = \text{elemento de arco} = R d\theta$$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\Rightarrow ds = R \omega dt$$

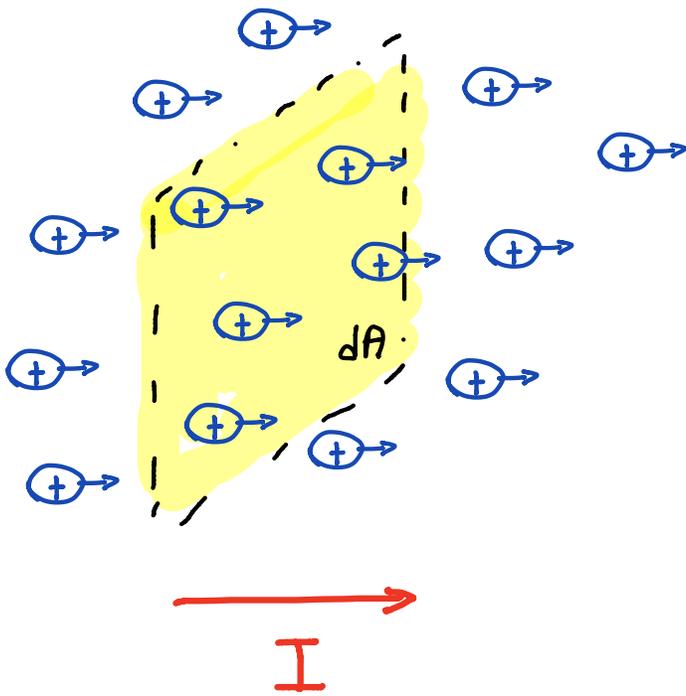
$$\Rightarrow dq = \lambda \omega R dt \quad \Rightarrow I = \lambda \omega R$$

$$\Rightarrow \underline{I = \frac{Q \omega}{2\pi}}$$



es la intensidad de corriente que pasa por un punto - cualquiera - del anillo.

# DENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA



La densidad de corriente es una cantidad vectorial, en la dirección de la corriente  $I$ , cuya magnitud mide la cantidad de carga neta que pasa, por unidad de tiempo, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación de la carga

$$\rightarrow \vec{J}(\vec{r}; t) \quad [J] = \frac{C}{s \cdot m^2} = \frac{A}{m^2}$$

luego, la corriente que fluye a través de una superficie arbitraria  $d\vec{S} = \hat{n} dS$  será

$$I(t) = \int_S \vec{J}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{S}$$

$S \equiv$  superficie a través de la cual se quiere conocer  $I$

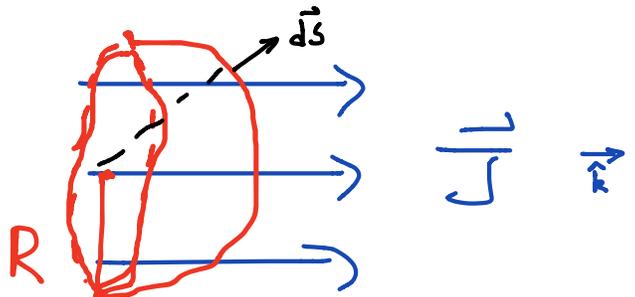
Ejemplo:

Corriente a través de semiesfera para  $\vec{J} = ct\hat{k}$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int J dS (\hat{k} \cdot \hat{r}) = \int J \cos\theta dS$$

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow I = J \pi R^2$$



## CONSERVACION DE CARGA ELECTRICA

Se trata de establecer matemáticamente el hecho experimental que la carga eléctrica se conserva.

Considerar un medio donde existe una densidad de carga libre  $\rho_e(\vec{r};t)$

Tomar un volumen  $V$  y

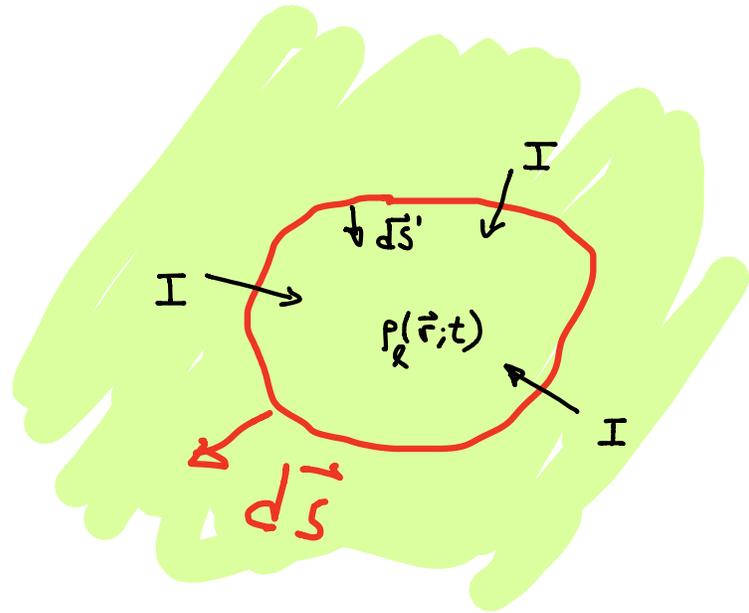
Suponer que - en el tiempo -

la carga aumenta;

ello significa que carga entra

al volumen a través de la

superficie  $S(V)$  que lo encierra



Si  $\rho_e(\vec{r};t)$  crece en el tiempo  $\rightarrow \frac{\partial \rho_e}{\partial t} > 0$

lo que crece se debe a una corriente que entra al vol  $V$

$$\begin{aligned} I &= \oint_{S(V)} \vec{J}(\vec{r};t) \cdot d\vec{S}' = - \oint_{S(V)} \vec{J}(\vec{r};t) \cdot d\vec{S} = - \int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r};t) dV \\ &= \frac{dq}{dt} \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_e(\vec{r};t) dV \end{aligned}$$

ECUACION DE CONTINUIDAD

(conservación de carga eléctrica)

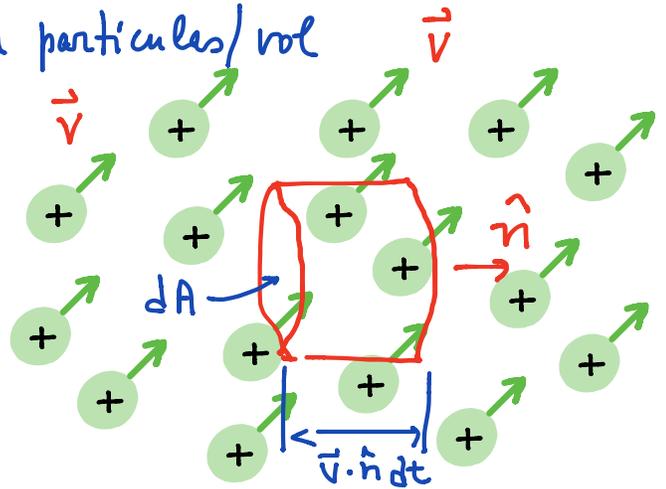
$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r};t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\vec{r};t) = 0$$

# MODELOS PARA $\vec{J}$

\* CASO DE PARTÍCULAS CON

- carga  $q$  cada una de ellas
- se mueven con la misma velocidad  $\vec{v}$  todas ellas
- existe una densidad de  $n$  partículas/vol

Tomar un diferencial de tiempo  $dt$   
y calcular la cantidad de carga  
contenida en el elemento de  
volumen  $dV$



$$dV = dA dx = dA \vec{v} \cdot \hat{n} dt$$

$\hat{n} \equiv$  define la sección del cilindro

∴ la carga infinitesimal contenida en  $dV$  será

$$dq = q dN = q n dV = q n \vec{v} \cdot \vec{ds} dt \quad (d\vec{s} = dA \hat{n})$$

$$= (dI) dt$$

$$\Rightarrow dI = q n \vec{v} \cdot \vec{ds} \longrightarrow \boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}} = \overbrace{q n}^{\rho} \vec{v}$$

donde  $\rho = q n \equiv$  densidad volumétrica de carga.

## \* CASO DE CONDUCCIÓN METÁLICA

Empíricamente, se observa que en medios materiales donde circula corriente,

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$$

LEY DE OHM

$\sigma_c \equiv$  Conductividad del medio (tb. se usa  $g$ )

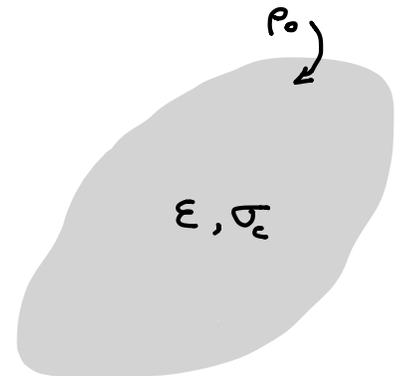
$\rho_c = \frac{1}{\sigma_c} \equiv$  resistividad del medio

### CONSECUENCIAS DE LEY DE OHM

→ EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CARGA EN CONDUCTOR

A un medio de permitividad  $\epsilon$  y conductividad  $\sigma_c$  se le coloca una densidad de carga  $\rho_0$  repartida en su volumen.

¿Qué pasa?



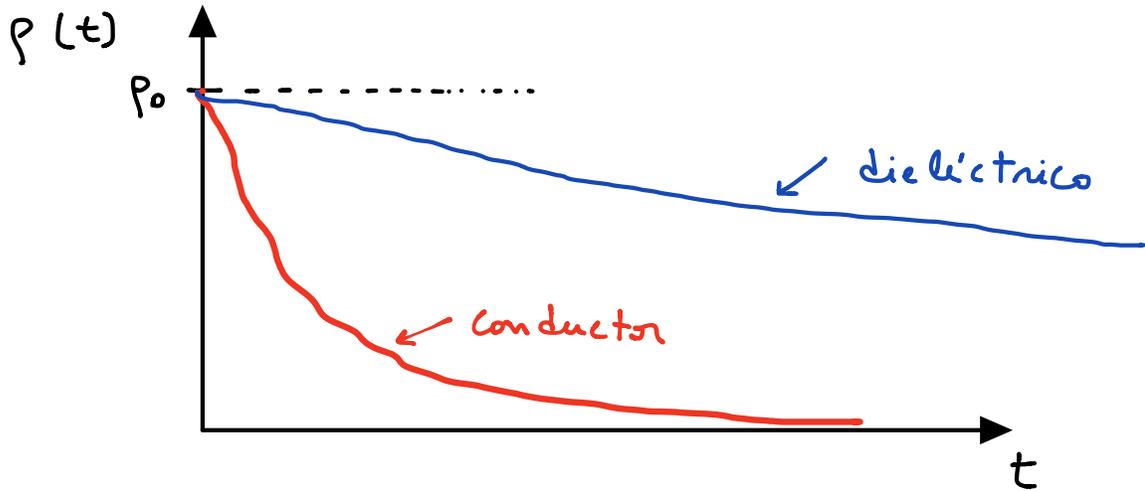
carga  $\rho_0 \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{J} = \sigma_c \vec{E}$

Por conservación de carga eléctrica:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \sigma_c \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma_c}{\epsilon} \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\sigma_c}{\epsilon} \rho_e = - \frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \rho(\vec{r}; t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-t/\tau}$$

con  $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma_c}$  [s]  $\rightarrow$  constante de relajación del medio



conductor ideal:  $\sigma_c \rightarrow \infty$   $\tau \rightarrow 0$

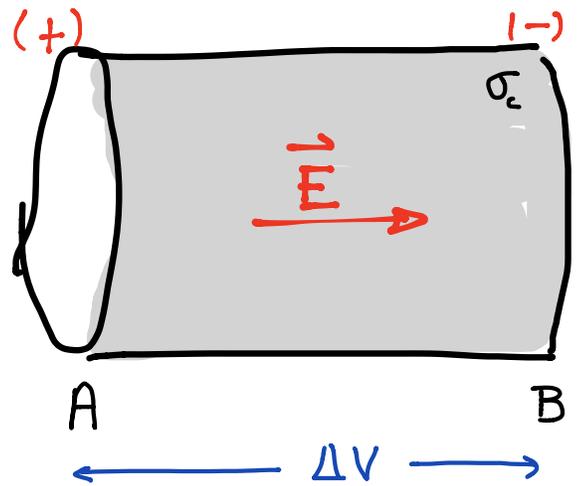
la carga migra a la superficie casi instantáneamente y  $\vec{E} = 0$  en interior.

buen conductor:  $\sigma_c \sim 10^8 \Rightarrow \tau \approx 10^{-19}$  s

buen dieléctrico:  $\sigma_c \sim 10^{-15} \Rightarrow \tau \sim 10^4$  s ( $\sim$  horas)

## → LEY DE OHM EN CONDUCTOR

- Considerar conductor  $\sigma_c$  y geometría conocida
- Se conecta una fuente externa de energía que genera  $\Delta V$  entre los extremos del conductor



$$\Delta V = V_A - V_B$$

- $\Delta V \Rightarrow \vec{E}$  en conductor tal que  $\Delta V = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$
- Por conductor circula una corriente,

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sigma_c \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- Observar que  $\Delta V \sim \|\vec{E}\|$        $I \sim \|\vec{E}\|$

⇒ INTRODUCIR RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD ENTRE LA DIFERENCIA DE POTENCIAL  $\Delta V$  APLICADA Y LA CORRIENTE  $I$  QUE CIRCUA ENTRE PUNTOS DONDE SE APLICÓ  $\Delta V$

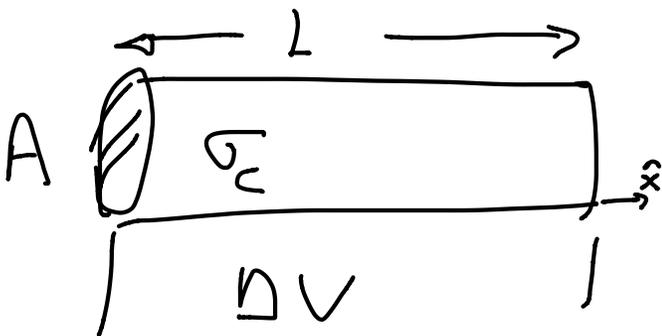
$$\Delta V = R I$$

Ley de Ohm

$$R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}} \equiv \frac{\text{RESISTENCIA}}{\text{del conductor}}$$

$$[R] = \frac{V}{A} \equiv \text{Ohm } [\Omega]$$

Ejemplo: Resistencia de conductor lineal



$$\text{Para } \Delta V \text{ aplicado } \Rightarrow \vec{E} = \frac{\Delta V}{L} \hat{x}$$

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} \Rightarrow I = J A = \sigma_c \frac{\Delta V}{L} A$$

$$\text{Resistencia } R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\Delta V}{\sigma_c \frac{\Delta V A}{L}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{L}{A} = \rho_c \frac{L}{A} \quad [\Omega]$$

La resistencia aumenta con el largo del conductor y a medida que su sección disminuye

$$\text{Buen conductor: } \sigma_c \rightarrow \infty (\rho_c \rightarrow 0) \Rightarrow R \rightarrow 0$$

## EJEMPLO :

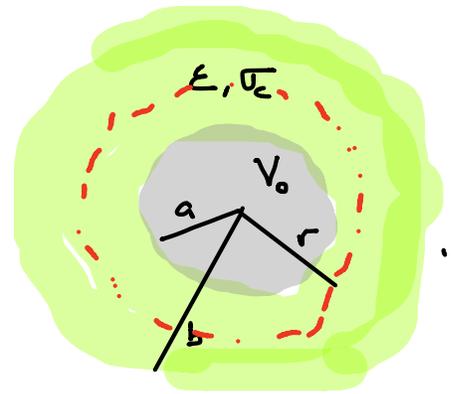
Conductor esférico de radio "a" rodeado de un medio imperfecto  
 $\Rightarrow$  tiene  $\epsilon, \sigma_c$  - también esférico de radio "b".

Conductor está conectado a una batería que lo mantiene a un potencial  $V_0$  constante.

2 casos a analizar:

a)  $\sigma_c = 0$  (dieléctrico perfecto)

b)  $\sigma_c \neq 0$

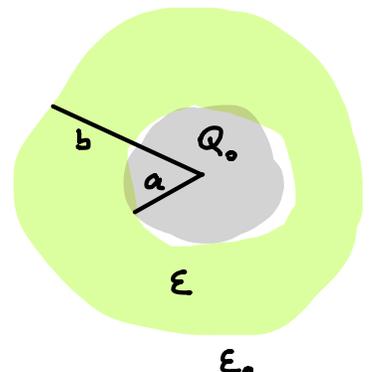


- Calcular la carga libre en superficie del conductor ( $r=a$ ) y del dieléctrico ( $r=b$ );
- La energía gastada en polarizar el dieléctrico
- Energía disipada en dieléctrico por efecto Joule
- etc, etc.

### CASO $\sigma_c = 0$ (aislante perfecto)

- Suponer carga  $Q_0$  en conductor
- Calcular  $\vec{E}$  en todo el espacio

$$\vec{D} = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} \vec{D} & a \leq r < b \\ \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D} & r > b \end{cases}$$



- Imponer condición  $V(r=a) = V_0$

$$V_0 = -\int_{-\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon a b} (b-a)$$

$$\Rightarrow Q_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 b}{1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left(\frac{b-a}{a}\right)} V_0 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

Observar que  $Q_0$  (con dieléctrico)  $>$   $Q_0$  (sin dieléctrico)

- Conociendo  $Q_0 \Rightarrow$  conocer todos los campos  $\vec{E}$
- Energía necesaria para polarizar el dieléctrico

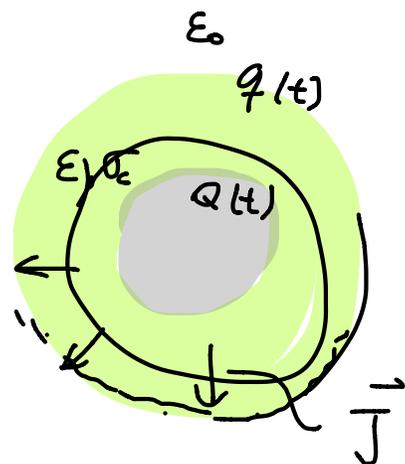
$$\Delta W = \frac{1}{2} V_0 [Q_0(\text{con dieléct}) - Q_0(\text{sin dieléct})]$$

$$= \frac{1}{2} V_0^2 4\pi\epsilon_0 \frac{(b-a) \left[1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right]}{1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left(\frac{b-a}{a}\right)}$$

- etc

### CASO $\sigma_c \neq 0$

Este caso es muy interesante.  
Como medio tiene conductividad,  
carga libre va a emigrar desde conductor  
hasta la superficie exterior del dieléctrico



- Sean  $Q(t)$  carga libre en  $r=a$   
 $q(t)$  carga libre en  $r=b$

- El vector desplazamiento será

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad a \leq r \leq b$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{D} = \frac{Q+q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad r > b$$

$$\vec{E} = \frac{Q+q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

- Condición del problema: potencial del conductor  $V_0$

$$\Rightarrow V_0 = -\int_{-\infty}^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q+q}{4\pi \epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi \epsilon b a} (b-a)$$

$$\text{Llamar } K = 1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{b-a}{a}$$

$\rho_0$

$$4\pi \epsilon_0 b V_0 = K Q(t) + q(t) \quad (1)$$

$$\Rightarrow 0 = K \frac{dQ}{dt} + \frac{dq}{dt} \quad \leftarrow$$

- necesito otra relación entre  $Q$  y  $q$ !

$$\text{en } r=b \quad \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -i = -\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = J(b) 4\pi b^2 = \frac{\sigma_s}{\epsilon} D(b) 4\pi b^2 = \frac{\sigma_s}{\epsilon} Q(t)$$

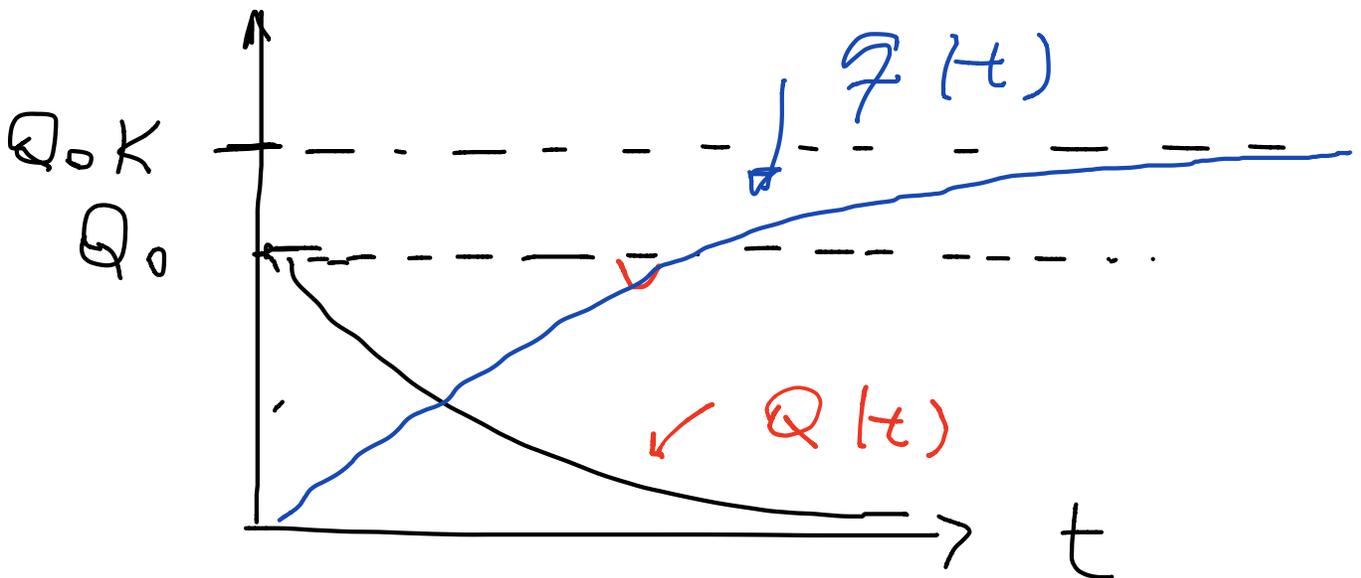
se concluye:  $\frac{dq}{dt} = \frac{\sigma_c}{\epsilon} Q(t)$  (2)

Resolver ecs. (1) y (2)

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = K \frac{\epsilon}{\sigma_c}$$

$$q(t) = Q_0 K [1 - e^{-t/\tau}]$$

$$Q_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 b}{K} V_0$$



# RESISTENCIAS EQUIVALENTES

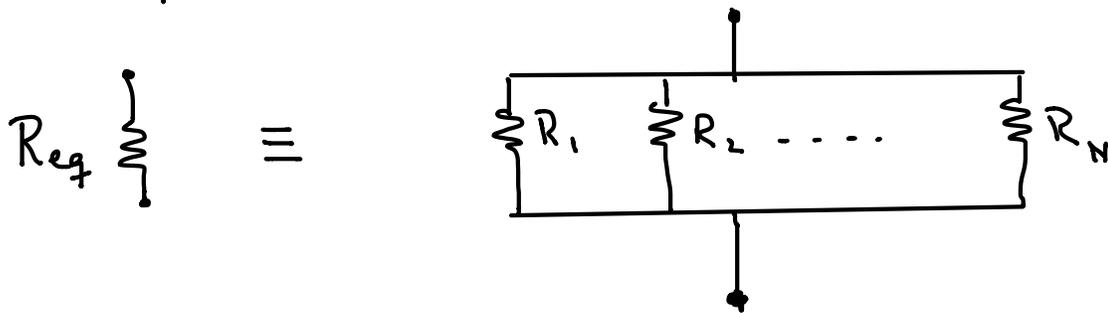
## \* Conexión en serie



$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$

La resistencia equivalente siempre es mayor que cada una de las resistencias en serie

## \* Conexión en paralelo



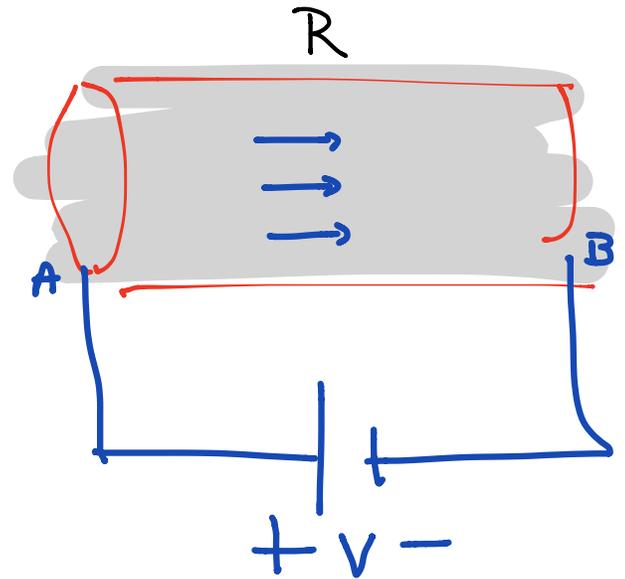
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

La resistencia equivalente siempre es menor que cada una de las resistencias conectadas en paralelo.

## → EFFECTO JOULE

La fuente de energía externa permite mantener una corriente circulando.

Como el punto A tiene un potencial mayor que B, significa que la carga en movimiento perdió energía eléctrica el trayecto de A → B, y la ganó en energía cinética para mantener el movimiento de la carga en conductor.



$$K \equiv \text{energía cinética} = q(V_A - V_B)$$

Pero,  $K \rightarrow 0$  debido a interacciones de la carga con la red cristalina: se disipa en forma de calor. Para mantener el proceso, la fuente externa debe entregar continuamente una energía equivalente a  $K$  para que la corriente se mantenga.

La disipación de energía (en forma de calor) en el conductor recibe el nombre de EFFECTO JOULE.

Considerar una carga infinitesimal  $dq$ . La energía disipada en el conductor será

$$dW = dq(V_A - V_B)$$

∴ la energía disipada por unidad de tiempo  $dt \rightarrow$  **POTENCIA**

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt} (V_A - V_B)$$

$$\Rightarrow \text{Potencia disipada} \equiv P = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dW}{dt} = I \Delta V$$

Potencia disipada es igual a la diferencia de potencial a la que está sometido el conductor por la corriente que por él circula

$$\text{Unidades: } [P] = V \cdot A \equiv \text{Watt}$$

La energía total disipada en  $[t_0, t_1]$

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt = \langle P \rangle (t_1 - t_0)$$

CONDUCTOR LINEAL

$$\Delta V = RI \Rightarrow$$

$$P = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

## CONDUCTOR CUALQUIERA:

$$\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = \int_S (\mathbf{J} \cdot \mathbf{d}\mathbf{s}) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\mathbf{r}) \quad \mathbf{J} \parallel \mathbf{d}\mathbf{r}$$

$$\Rightarrow P = \int_{\text{Vol del conductor}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

## CONDICIONES DE BORDE

Interesa conocer el comportamiento de  $\vec{J}$  en la superficie de separación de 2 medios.

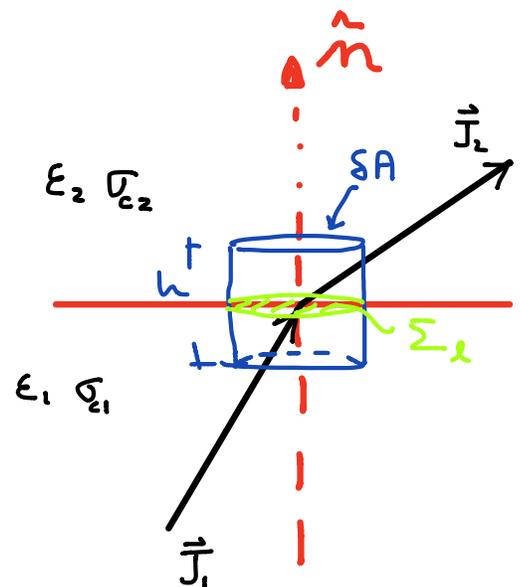
Para ello, integrar la ecuación de continuidad (o conservación de la carga)

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho_e}{\partial t}$$

en un volumen que comprende la superficie de separación entre los medios. Sea un cilindro de altura despreciable dicha superficie ( $SA=h$ ):

Usando teo. de Gauss,

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} = - \frac{\partial \Sigma_e}{\partial t} \quad \left. \vphantom{\frac{\partial \Sigma_e}{\partial t}} \right\} \begin{array}{l} \Sigma_e : \text{densidad superficial} \\ \text{de carga en interfaz} \end{array}$$



la relación significa que, en general, puede existir un acúmulo de carga libre que produce una discontinuidad en la componente normal de  $\vec{J}$

$$\Rightarrow J_{2n} - J_{1n} = 0 \text{ si } \partial_t \equiv 0 \text{ (si no hay variación en } t)$$

$$\neq 0 \text{ si } \cdot \Sigma = \Sigma(t)$$

Por otra parte, el campo electrostático satisface

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \text{ en superficie de separación} \Rightarrow \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

(componentes tangenciales)

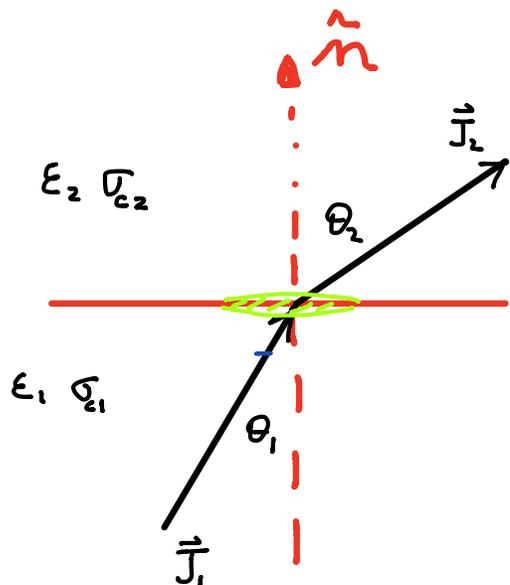
$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma_{c1}} J_{1t} = \frac{1}{\sigma_{c2}} J_{2t} \quad (\text{no se conservan})$$

conclusión: el vector densidad de corriente se refracta al pasar de un medio a otro

$$J_{1n} = J_1 \cos \theta_1 \quad J_{1t} = J_1 \sin \theta_1$$

etc

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}}$$



cuando  $\Sigma_e$  no depende del tiempo!

## DENSIDAD DE CARGA $\Sigma_e$ en superficie de separación

Debido a la circulación de corriente de un medio a otro, se acumula carga libre en la superficie. Para calcularla, recordar

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \Rightarrow \text{en superficie de separación} \quad (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = \Sigma_e$$

$$\text{pero } \vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon}{\sigma_c} \vec{J} \Rightarrow \quad \underline{\Sigma_e = \left( \frac{\epsilon_2}{\sigma_{c2}} J_{2n} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_{c1}} J_{1n} \right)}$$

cuando la carga en la superficie no varía en el tiempo,

$$\frac{\partial \Sigma_e}{\partial t} = 0 \Rightarrow J_{2n} = J_{1n} = J_n \Rightarrow \Sigma_e = \left[ \frac{\epsilon_2}{\sigma_{c2}} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_{c1}} \right] J_n$$

Ver ejemplo desarrollado en apuntes del semestre pasado al final del capítulo corrientes eléctricas.

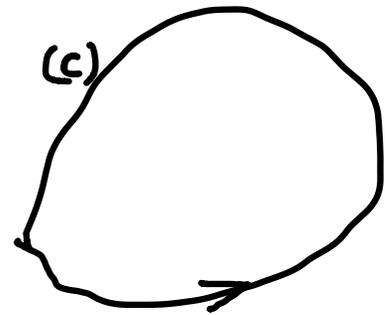
# FEM (fuerza electromotriz)

Es el nombre asignado a una fuente de energía externa que le transfiere a un sistema electromagnético y almacenada por éste. Básicamente, el problema es que un campo electrostático no puede mantener cargas en movimiento en una trayectoria cerrada:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

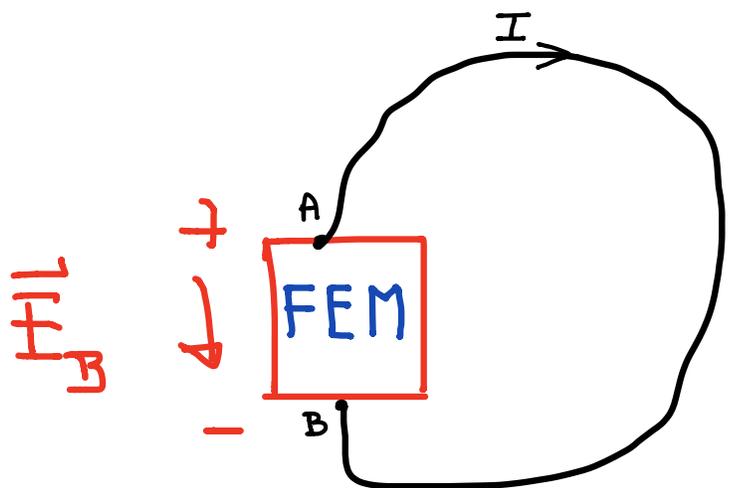
no hay movimiento resultante de la carga eléctrica.



La FEM provee un campo eléctrico de naturaleza no-conservativa y tal que modifique el campo eléctrico resultante sobre una trayectoria cerrada:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



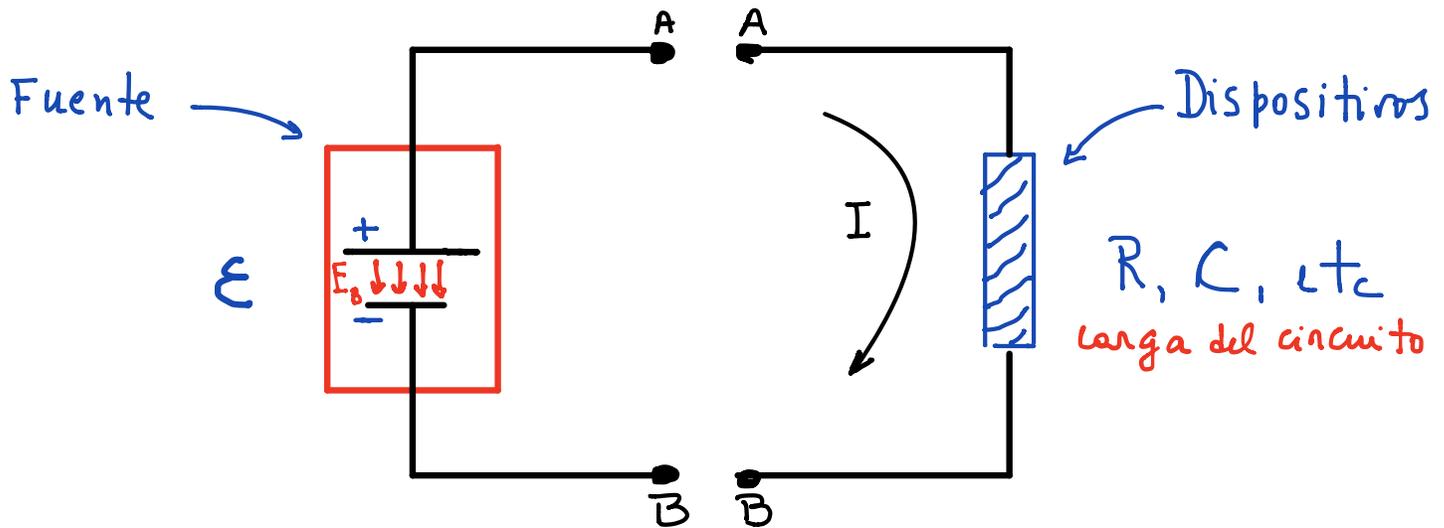
Se define:

$$\underline{FEM \equiv \mathcal{E} =: - \int_B^A \vec{E}_B \cdot d\vec{r}} = [V_A - V_B]_{\text{fuente}}$$

con lo cual:

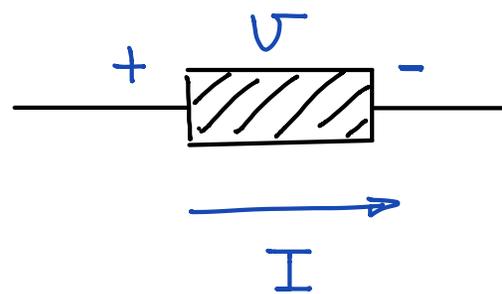
$$[V_A - V_B]_{\text{Circuito}} = [V_A - V_B]_{\text{fuente}}$$

---



### CONVENCIÓN:

Al circular una corriente por un elemento de circuito, se tiene una "caída" de potencial  $V$  (corriente circular de (+)  $\rightarrow$  (-))



$$V = R I \quad \text{para } R$$
$$= \frac{Q}{C} \quad \text{para } C$$

En una FEM, si sentido de  $I$  va de (-)  $\rightarrow$  (+), se tiene una "subida" de potencial ( $-\mathcal{E}$ )

# LEYES DE KIRCHHOFF

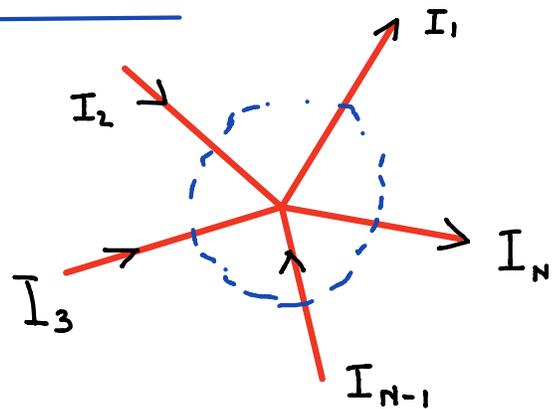
Son la manifestación práctica de las leyes que gobiernan el fenómeno de circulación de corriente. Fundamentales para el análisis de redes (o circuitos) eléctricos.

## \* LEY DE NODOS

Manifestación de la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\sum_i I_i = 0}$$

La suma de las corrientes que concurren a un nodo es nula



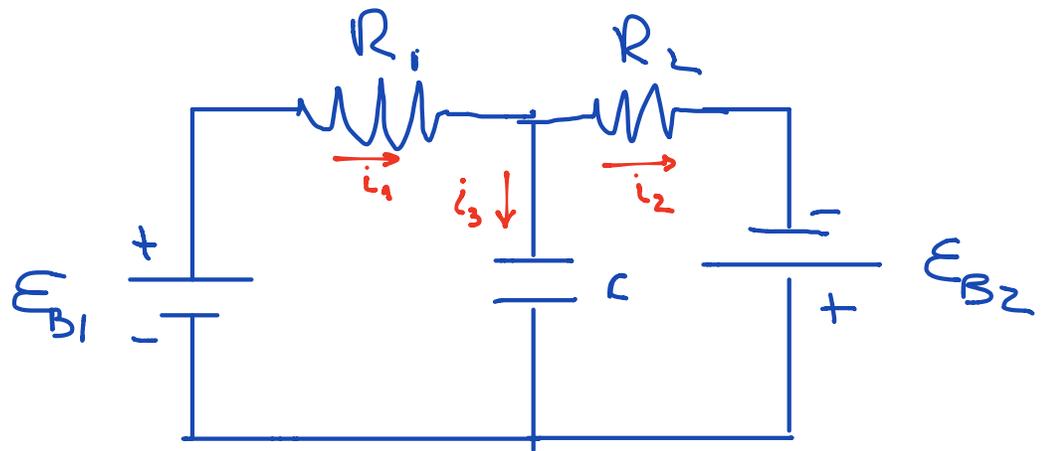
## \* LEY DE MALLA

$$\nabla \times [\vec{E} + \vec{E}_B] = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\sum_i [U_i + \mathcal{E}_i] = 0}$$

La suma de las caídas de potencial en cada elemento eléctrico ( $R, C, \text{etc}$ ) de una trayectoria más a qué ellas presentes en las FEM existentes en la trayectoria es nula.

## EJEMPLO:

$\mathcal{E}_{B1}, \mathcal{E}_{B2}$  constantes



$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$1) \quad 0 = -\mathcal{E}_{B1} + R_1 i_1 + \frac{Q_3}{C} \quad \left( \frac{dQ_3}{dt} = i_3 \right)$$

$$2) \quad 0 = -\mathcal{E}_{B1} + R_1 i_1 + R_2 i_2 - \mathcal{E}_{B2}$$

$$(1) \Rightarrow 0 = R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{i_3}{C} = R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} (i_1 - i_2)$$

$$\Rightarrow i_2 = i_1 + R_1 C \frac{di_1}{dt}$$

$$(2) \Rightarrow R_1 R_2 C \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_2) i_1 = \mathcal{E}_{B1} + \mathcal{E}_{B2}$$

$$i_1(t) = \frac{\mathcal{E}_{B1} + \mathcal{E}_{B2}}{R_1 + R_2} + K e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}$$

*Cte de integración*

$K$  depende de la situación del circuito inicialmente.

Para el caso en que el condensador  $C$  esté descargado significa que  $V_C = 0$

$$\Rightarrow i_1(0) = \frac{\epsilon_{B1}}{R_1} \quad \Rightarrow K = \frac{\epsilon_{B1} R_2 - \epsilon_{B2} R_1}{R_1 (R_1 + R_2)}$$

Y finalmente se obtiene

$$i_1(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} \left\{ \epsilon_{B1} + \epsilon_{B2} + \left( \epsilon_{B1} \frac{R_2}{R_1} - \epsilon_{B2} \right) e^{-t/\tau} \right\}$$

$$i_2(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} \left\{ \epsilon_{B1} + \epsilon_{B2} - \left( \epsilon_{B1} - \epsilon_{B2} \frac{R_1}{R_2} \right) e^{-t/\tau} \right\}$$

$$i_3(t) = \left( \frac{\epsilon_{B1}}{R_1} - \frac{\epsilon_{B2}}{R_2} \right) e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{(R_1 + R_2)}$$

Y la carga en el condensador:

$$Q_C(t) = \int_0^t i_3(t') dt' = \tau \left[ \frac{\epsilon_{B1}}{R_1} - \frac{\epsilon_{B2}}{R_2} \right] (1 - e^{-t/\tau})$$

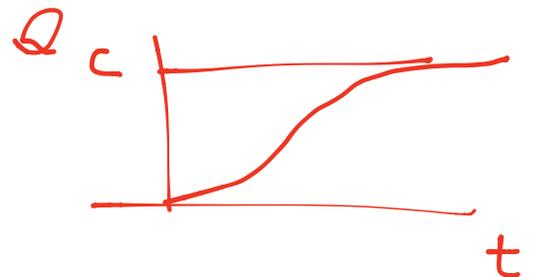
Para  $t \rightarrow \infty$

$$i_1 = i_2 \rightarrow \frac{\epsilon_{B1} + \epsilon_{B2}}{R_1 + R_2}$$

$$i_3 \rightarrow 0$$

$$Q_C \rightarrow \tau \left[ \frac{\epsilon_{B1}}{R_1} - \frac{\epsilon_{B2}}{R_2} \right]$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\frac{R_2 \epsilon_{B1} - R_1 \epsilon_{B2}}{R_1 + R_2}}_{V_C(t \rightarrow \infty)} C$$



# MAGNETOSTÁTICA

# MAGNETOSTÁTICA

Empezaremos el estudio de un nuevo fenómeno

observable en la naturaleza: **MAGNETISMO**

En la aproximación independiente del tiempo  $\rightarrow$  Magnetostática

## EVIDENCIA

Consideran 2 conductores:  
por los que circulan  $I_1$  e  $I_2$

Se observa:

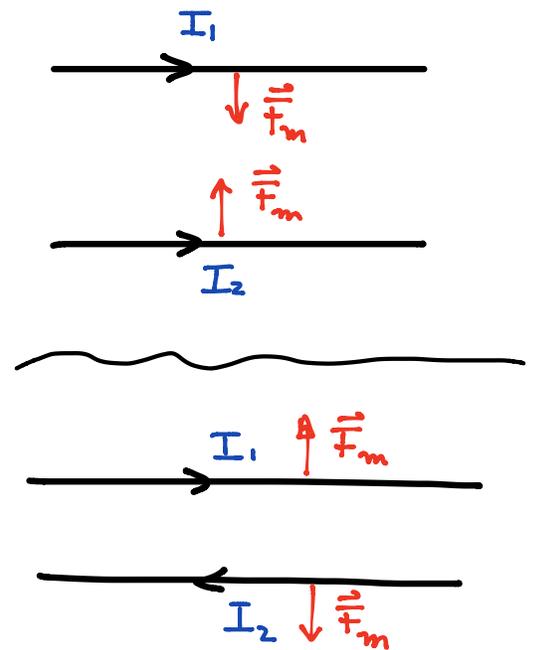
$$* \quad \|\vec{F}_{mag}\| \propto \frac{I_1 I_2}{r^2}$$

$r$ : distancia entre conductores

\* dirección de fuerzas cambia si se invierten las corrientes

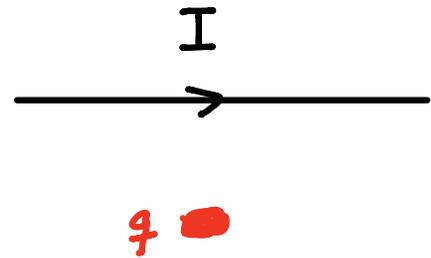
mismo sentido  $I$ 's  $\rightarrow \vec{F}_{mag}$  atractiva  
distinto sentido  $I$ 's  $\rightarrow \vec{F}_{mag}$  repulsiva

\* Fuerzas se anulan si una de las corrientes es nula

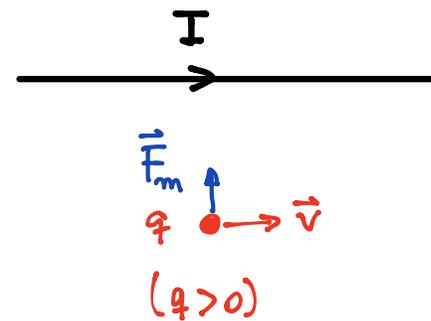


## OTRA EVIDENCIA :

- \* una carga eléctrica  $q$  en reposo  
cerca de conductor con  $I$   
nada pesa

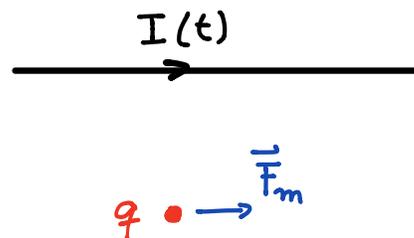


- \* Si carga se mueve con  $\vec{v}$   
carga se mueve (hay una  $\vec{F}$ )  
 $\vec{F} \perp \vec{v}$



- \* Si  $I = I(t)$

Carga que esté en reposo  
empieza a moverse



# LEY DE FUERZA (AMPÈRE)

Para dar una expresión matemática a lo observado experimentalmente

definir:

en analogía a un elemento

de carga  $dq$ , introducir

elemento diferencial de corriente  $\equiv I d\vec{r}$

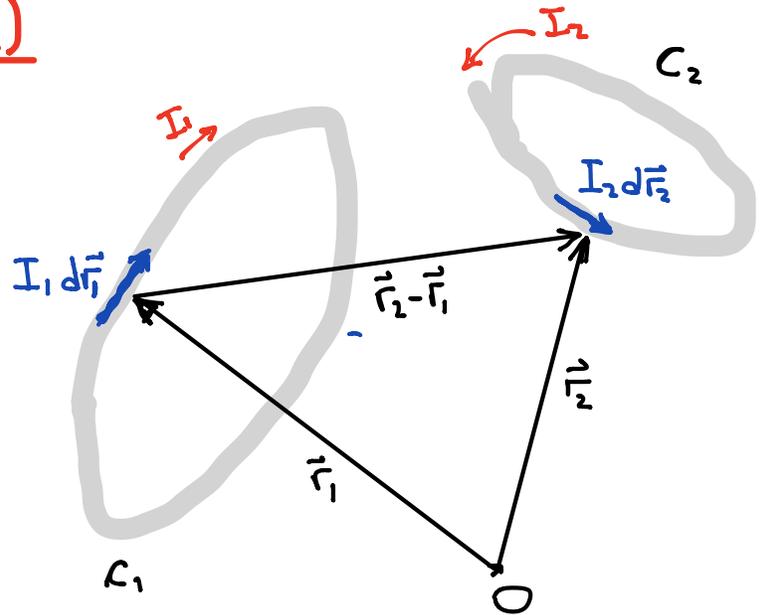
que corresponde a la corriente por el elemento de trayectoria en el conductor  $d\vec{r}$

$$dq \longrightarrow \vec{v} dq \equiv I d\vec{r}$$

La ley de fuerzas indica que el elemento de (ejercido sobre el elemento de corriente  $I_2 d\vec{r}_2$  debido al elemento de corriente  $I_1 d\vec{r}_1$  es

$$d^2 \vec{F}_{2(1)} = K \frac{(I_2 d\vec{r}_2) \times [I_1 d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}$$

$K \equiv$  constante, según sistema de unidades



en SI de unidades:  $K = \frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7} \left[ \frac{N}{A^2} \right]$

$\mu_0 \equiv$  permeabilidad magnética del vacío

Integrando sobre toda la trayectoria que recorren las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ ,

$$\vec{F}_{2(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(I_2 d\vec{r}_2) \times [(I_1 d\vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}$$

---

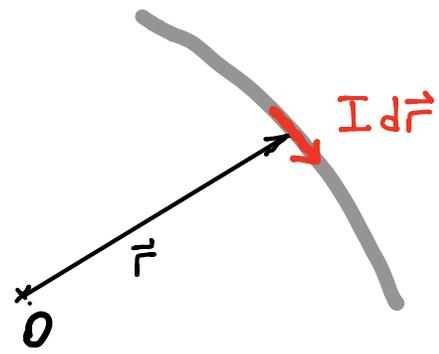
es directo verificar que  $\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)} \rightarrow$  hacerlo!

## GENERALIZACIÓN

Así como la fuerza electrostática se expresaba en términos de elementos de carga  $dq \rightarrow \sigma dS \rightarrow \rho dV$  cuando se estaba en presencia de distribuciones (superf. o vol.) de carga,

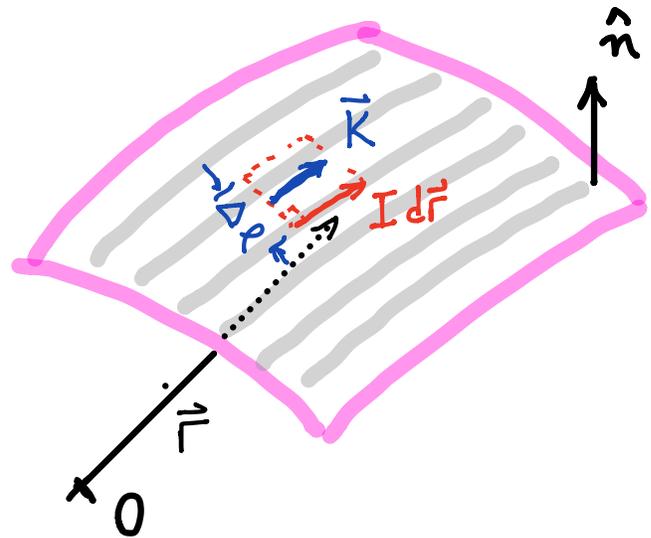
en el caso presente el elemento de corriente  $I d\vec{r}$ , responsable de la fuerza magnética, toma formas alternativas según se distribuya la corriente en el espacio

\* en conductor



\* en una superficie

en lugar de contabilizar cada elemento de corriente, es usual introducir la cantidad de corriente por unidad de longitud



$K \rightarrow$  tal que la corriente que circula por unidad de largo  $\Delta l$  es

$$\Delta I = K \Delta l \quad [K] = \frac{A}{m}$$

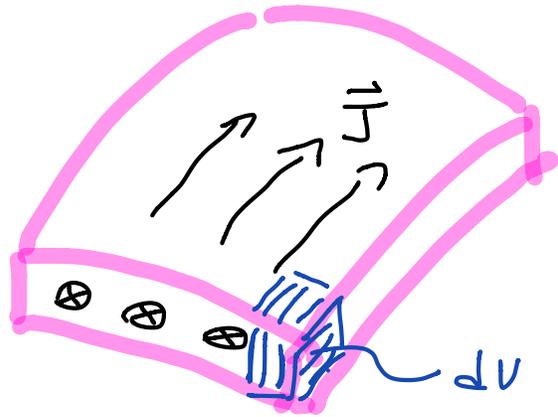
con lo cual

$$\begin{aligned} I d\vec{r} &\rightarrow \Delta I d\vec{r} = K \Delta l d\vec{r} \\ &= \vec{K} \underbrace{\Delta l d\vec{r}}_{dS} = \vec{K} dS \end{aligned}$$

donde  $\vec{K} \equiv$  densidad superficial de corriente, es decir, la corriente que circula por unidad de largo y en la dirección que se mueve la carga positiva (convención)

\* en volumen

introduciendo la densidad de corriente  $\vec{J}$ , que corresponde a la corriente que circula por unidad de superficie,



$$[J] = \frac{A}{m^2}$$

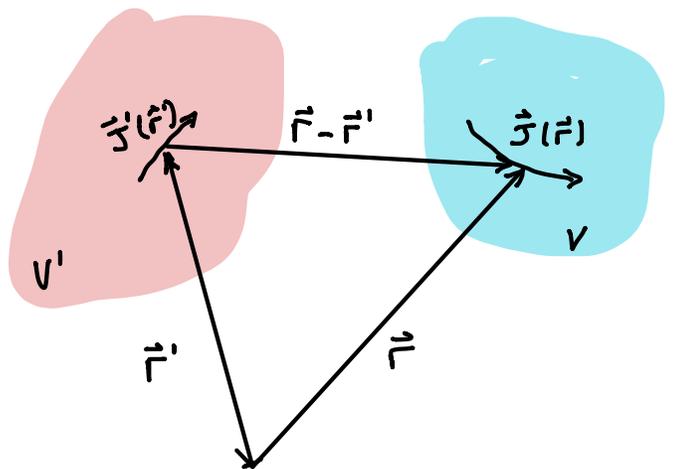
$$\Rightarrow I d\vec{r} \rightarrow \vec{J} dV \quad (dV \equiv \text{elemento de vol descrito por } \vec{r})$$

$$\text{recordar: } \Delta I = \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Delta I d\vec{r} = \vec{J} \cdot d\vec{S} d\vec{r} = \vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{r} = \vec{J} dV$$

## FORMA GENERAL LEY AMPERE

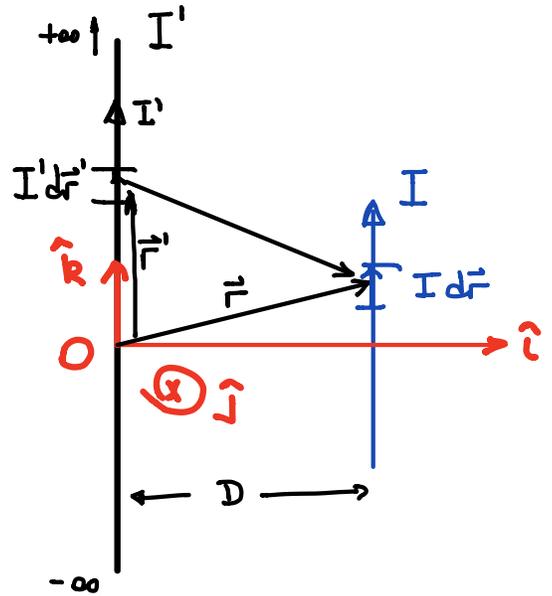
$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}) \times [\vec{J}'(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (dV)(dV')$$

$V, V'$  son los volúmenes que contienen a las densidades de corrientes  $\vec{J}'(\vec{r}')$  y  $\vec{J}(\vec{r})$



## EJEMPLO

Calcular la fuerza magnética que un alambre muy largo, con corriente  $I'$ , ejerce sobre un alambre finito de largo  $2L$  y corriente  $I$ . La distancia de separación entre los alambres es  $D$



Aplicación directa de Ley de Fuerzas magnéticas:  
sobre alambre largo  $2L$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{(I d\vec{r}) \times [(I' d\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Tomar sistema cartesiano.

$$\vec{r} = D\hat{i} + z\hat{k} \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = dz\hat{k} \quad -L \leq z \leq L$$

$$\vec{r}' = z'\hat{k} \quad \rightarrow \quad d\vec{r}' = dz'\hat{k} \quad -\infty \leq z' \leq \infty$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 = [D^2 + (z - z')^2]^{3/2}$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = dz'\hat{k} \times [D\hat{i} + (z - z')\hat{k}] = D dz' \hat{j}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} \times [d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] = dz \hat{k} \times D dz' \hat{j} = -D dz dz' \hat{i}$$

$$\text{Luego: } \vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' D \int_{-L}^L dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{[D^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \quad (-\hat{i})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{2}{D^2}}$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' D \frac{2}{D^2} 2L (-\hat{i})$$

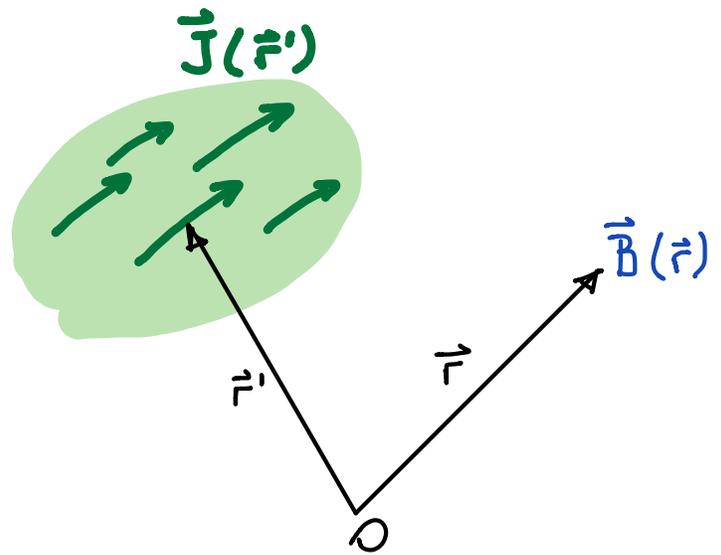
$$\vec{F} = \mu_0 \frac{I I'}{\pi D} L (-\hat{i})$$

- \* Fuerza es atractiva! (entre alambres)
- \* Tiene una expresión simple (debido al alambre  $\infty$ )
- \* La fuerza por unidad de largo sobre alambre finito

$$\vec{f}_L = \frac{\vec{F}}{(2L)} = \mu_0 \frac{I I'}{2\pi D} (-\hat{i})$$

# CAMPO MAGNÉTICO

La idea es asociar a la fuente del fenómeno, la densidad de corriente  $\vec{J}$  en general, un campo magnético  $\vec{B}$  tal que otra distribución de corriente o cargas eléctricas en movimiento, experimenten una fuerza dada por la ley de Ampère.

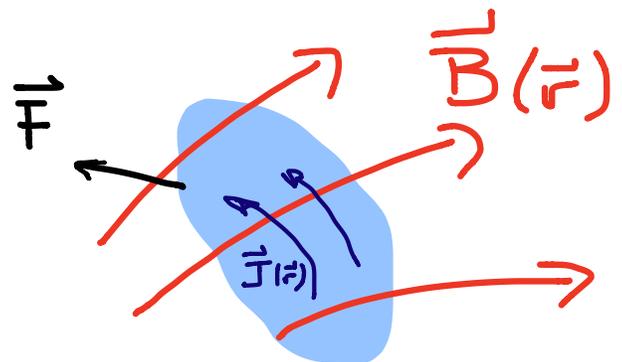


En efecto, definiendo el campo magnético producido por una distribución de corriente  $\vec{J}(\vec{r}')$  en un punto del espacio descrito por el vector posición  $\vec{r}$ ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{Vol de corriente}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times [\vec{r} - \vec{r}']}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

entonces, otra distribución de corriente (o carga en movimiento) experimenta una fuerza magnética,

$$\vec{F} = \int_{\text{Vol}} \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dV$$



La expresión es generalizable a otras distribuciones de corrientes en presencia de  $\vec{B}$ :

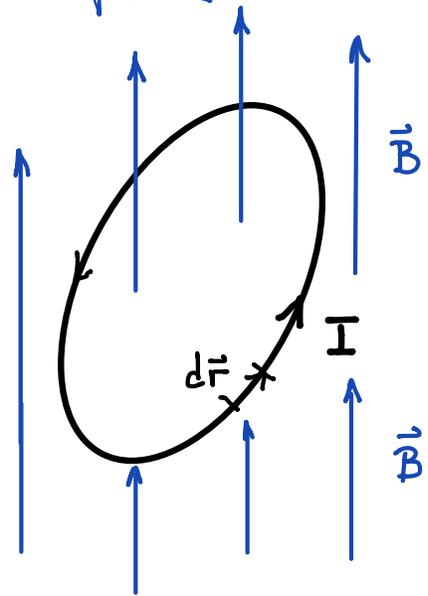
$$\underline{\int \vec{J}(\vec{r}) dV \rightarrow \vec{K}(\vec{r}) dS \rightarrow I d\vec{r}}$$

→ Caso particular: FUERZA Y TORQUE sobre espina  
en campo magnético  $\vec{B}$  uniforme

Corresponde al caso de un conductor (espina) por donde circula  $I$ .

$$\vec{B} \equiv \text{constante}$$

elemento de fuerza que se ejerce sobre un elemento de espina  $d\vec{r}$



$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \oint_C I d\vec{r} \times \vec{B} = I \left( \underbrace{\oint_C d\vec{r}}_0 \right) \times \vec{B}$$

Conclusión:  $\vec{F} = 0$

no hay fuerza neta (resultante) sobre espina en  $\vec{B}$  uniforme

**TORQUE?**

con respecto a origen de vector posición:  $d\vec{\tau}_o = \vec{r} \times d\vec{F}$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_o = I \oint_C \vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}]$$

reordenando, se demuestra que para una espina plana,

$$\vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}] = d[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})] - d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \vec{r} \cdot \vec{B} d\vec{r} - \vec{r} \cdot d\vec{r} \vec{B} - d\vec{r} \cdot \vec{B} \vec{r} + d\vec{r} \cdot \vec{B} \vec{r} \\ &= (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B} + d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) \quad (2) \end{aligned}$$

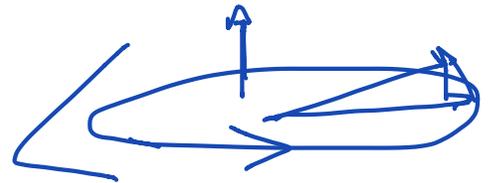
$$(1) + (2) \Rightarrow d\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} [d[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})] - (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}]$$

conclusión:  $\vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}] = \frac{1}{2} d[\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{B})] + \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{r} \times [d\vec{r} \times \vec{B}] = \left\{ \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{r} \right\} \times \vec{B} \quad (\vec{B} = \text{constante})$$

Identificando:  $\vec{A} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{r}$  Área de la espira

se obtiene:  $\vec{\tau}_o = I \vec{A} \times \vec{B}$

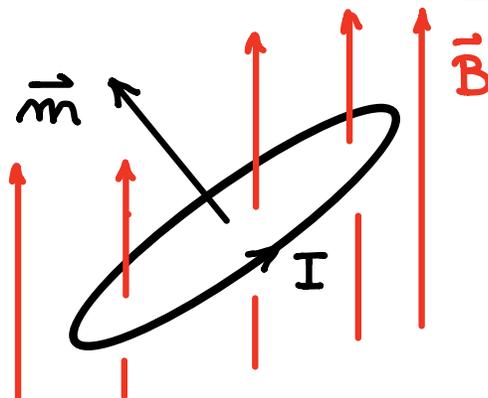


El producto  $I \vec{A}$  se identifica con el momento dipolar magnético asociado a la espira plana,

$$\vec{m} = I \vec{A}$$

con lo cual el torque se expresa como

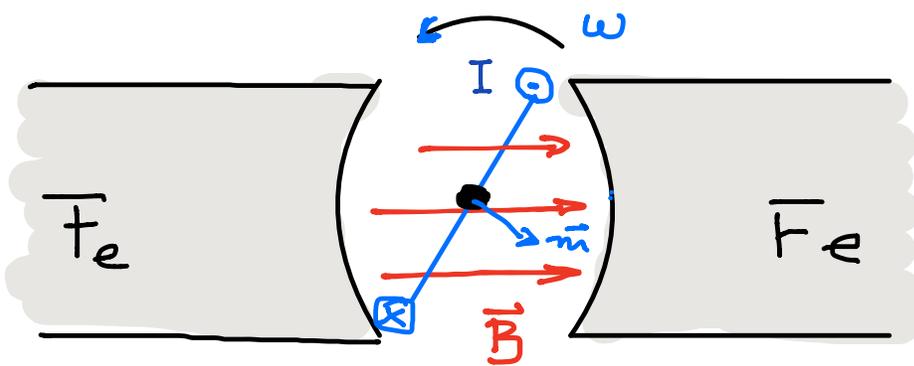
$$\vec{\tau}_o = \vec{m} \times \vec{B}$$



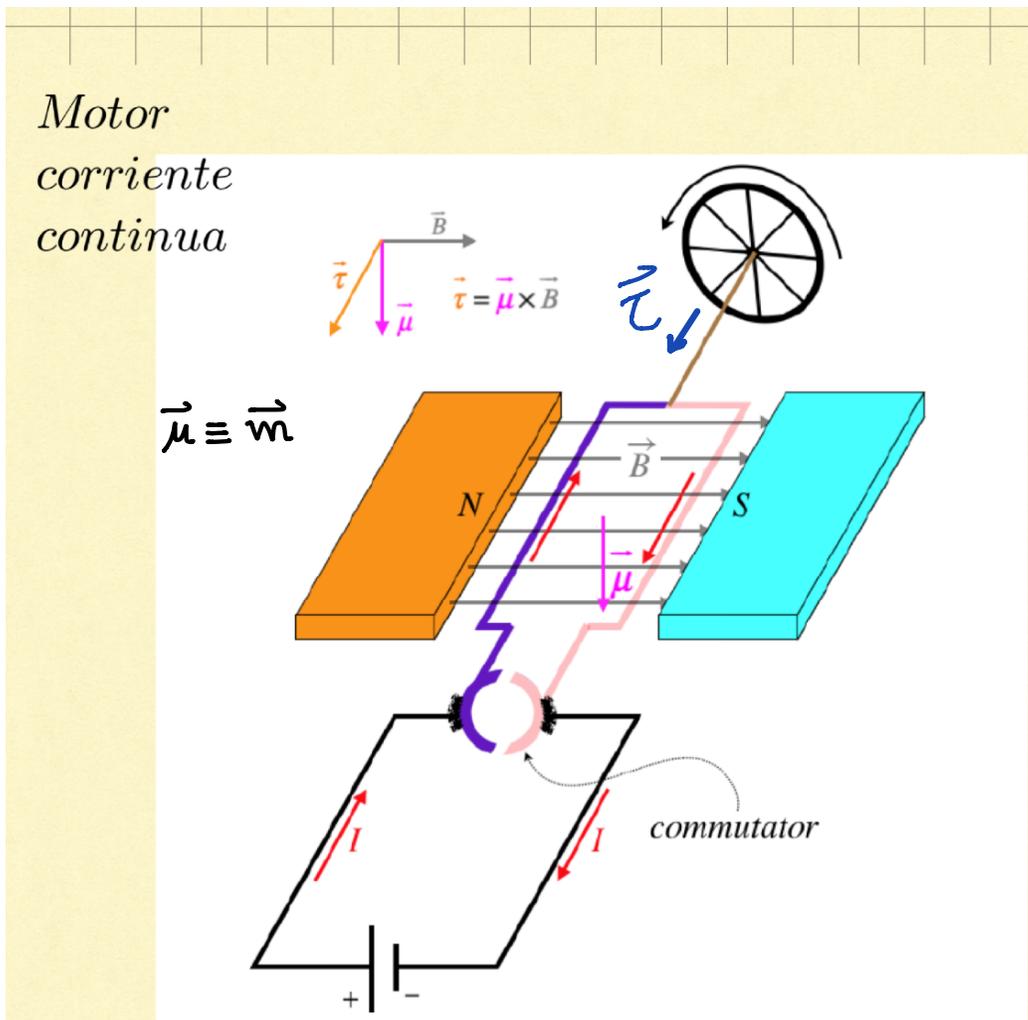
En presencia de  $\vec{B}$ , la espira tiende a rotar de manera de alinearse con el campo magnético,  $\vec{A} (\vec{m}) \parallel \vec{B}$

(la dirección de  $\vec{A}$  está dada por sentido en que circula la corriente por la espira)

### EJEMPLO: Principio funcionamiento motor eléctrico



escobillas cambian sentido de circulación de corriente cada  $\pi$  rad

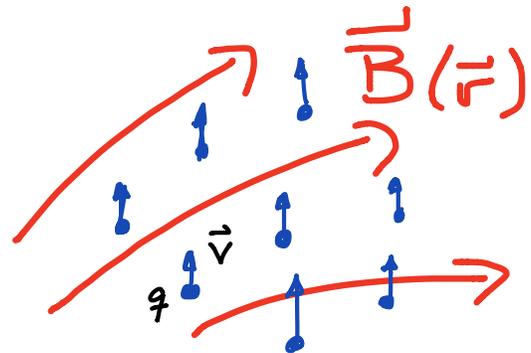


→ Caso particular: FUERZA SOBRE PARTICULA EN MOVIMIENTO

Si en lugar de una corriente o una densidad de corriente  $\vec{J}$  se tiene un flujo de partículas, cada una de carga  $q$  y velocidad  $\vec{v}$ ,

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} = \rho \vec{v}$$

$\rho \equiv$  densidad de partículas de carga  $q$   
por unidad de volumen



entonces, la fuerza sobre las partículas es

$$\vec{F} = \int \rho \vec{v} \times \vec{B} dV = \int \vec{v} \times \vec{B} dq$$

⇒ para 1 partícula  $\boxed{\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}}$  Fuerza de Lorentz

El movimiento de partícula de masa  $m$  y carga  $q$  en el campo magnético será:

$$\underline{m \vec{a} = q \vec{v} \times \vec{B}} \quad (\text{recuerda } \vec{F} \text{ Coriolis})$$

a) la energía cinética se conserva

$$m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m v^2 = \text{constante!}$$

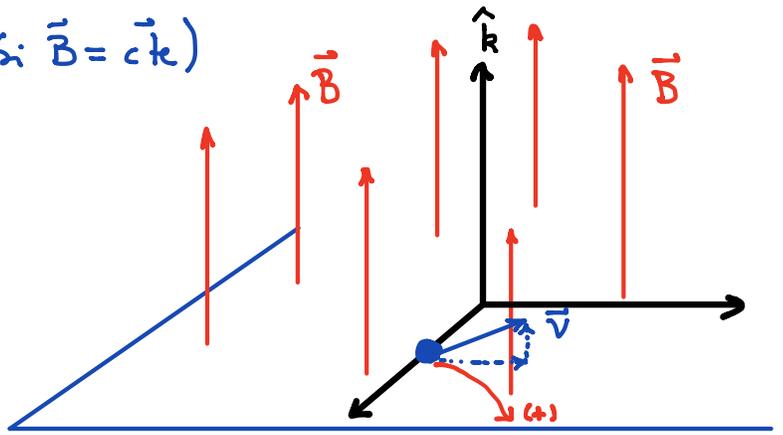
b) trayectoria es una hélice (si  $\vec{B} = B \hat{k}$ )

elegir  $\vec{B} = B \hat{k}$

Suponer que

$$\vec{v} = v_{\parallel} \hat{k} + \vec{v}_{\perp}$$

es decir, con componentes según el campo  $\vec{B}$  y perpendicular a él.



$$\text{Lorentz} \Rightarrow \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q \vec{v}_{\perp} \times B \hat{k}$$

$\Rightarrow$  no hay fuerza en dirección  $\hat{k}$

$\Rightarrow$  mov. uniforme según  $\hat{k}$

Lo interesante ocurre en plano  $\perp$  a  $\vec{B}$  ( $\hat{k}$ )

Es movimiento

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = qB \vec{v} \times \hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \Omega \vec{v}_{\perp} \times \hat{k} \quad \Omega = \frac{qB}{m}$$

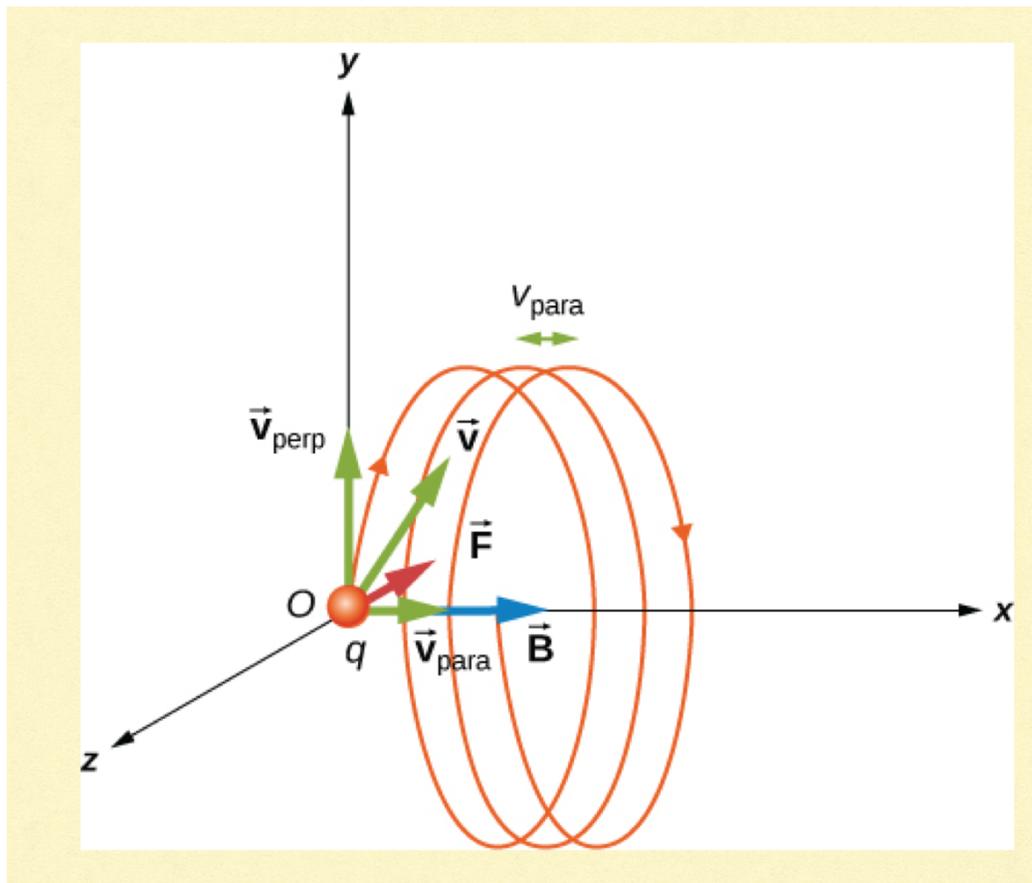
en plano  $\perp$  a  $\vec{B}$

Es directo demostrar que la dirección de la fuerza permanece siempre ortogonal a  $\vec{v}_{\perp}$  y su magnitud no cambia. Entonces, se concluye que partícula ejecuta un movimiento circular en el plano transversal

$$\frac{v_{\perp}^2}{R} = \Omega v_{\perp} \Rightarrow R = \frac{v_{\perp}}{\Omega} \quad \text{radio de circunferencia}$$

$$R = \frac{m}{qB} v_{\perp}$$

Radio crece con  $m$  y la energía  
decrece con carga y magnitud de  $B$

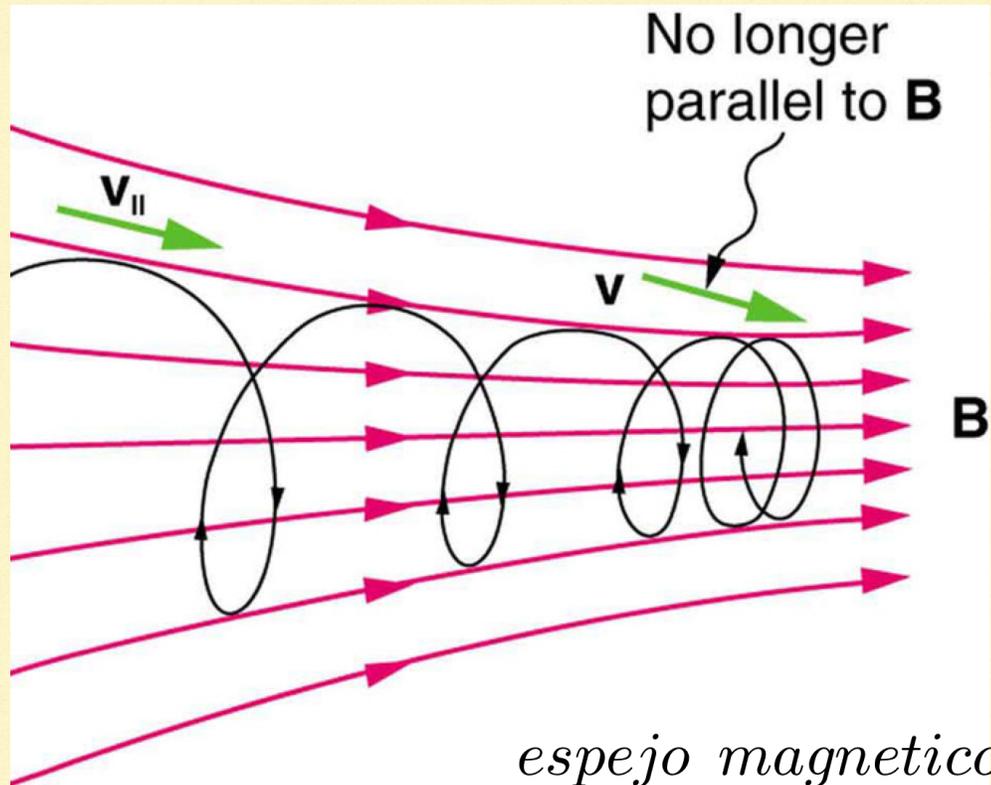
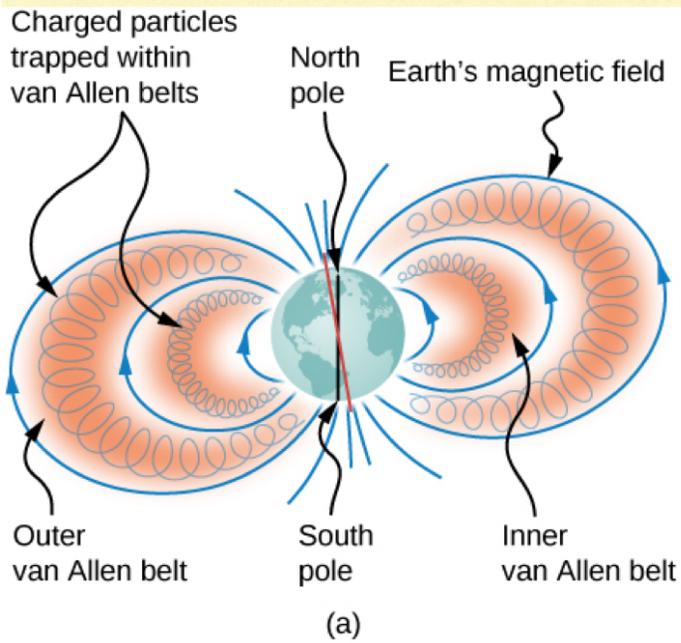


## CÁMARA DE BURBUJAS

(ver, por ejemplo,  
internet bajo  
bubble-chamber)

CERN





## UNIDADES

$$[B] = \frac{N}{A \cdot m} \equiv \text{TESLA} \left( \frac{\text{Weber}}{m^2} \right)$$

unidad alternativa (CGS): gauss

$$\underline{1 T = 10^4 \text{ gauss}}$$

ej: campo magnético terrestre  $\sim 0.25 - 0.65$  gauss

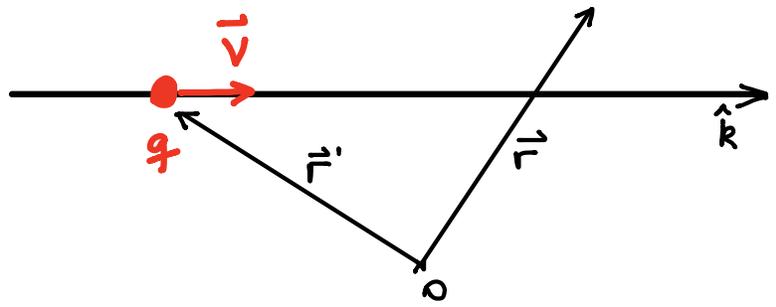
valores tecnológicos accesibles  $\sim 10 - 100 T$

# EJEMPLOS DE FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO

## \* Campo magnético de una carga puntual en movimiento

partícula:  $q, \vec{v} = c\vec{e}$  (mag. y dirección)  
 $\vec{B} = ?$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$



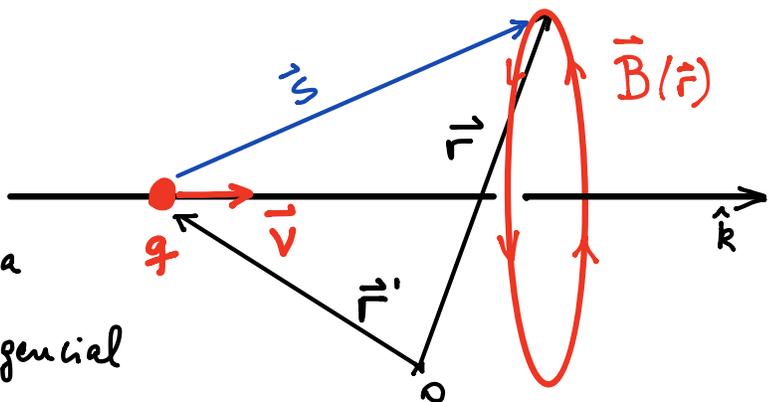
$$\vec{J}(\vec{r}') dV' \rightarrow dq \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Veamos una representación específica:

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{s}}{s^3}$$



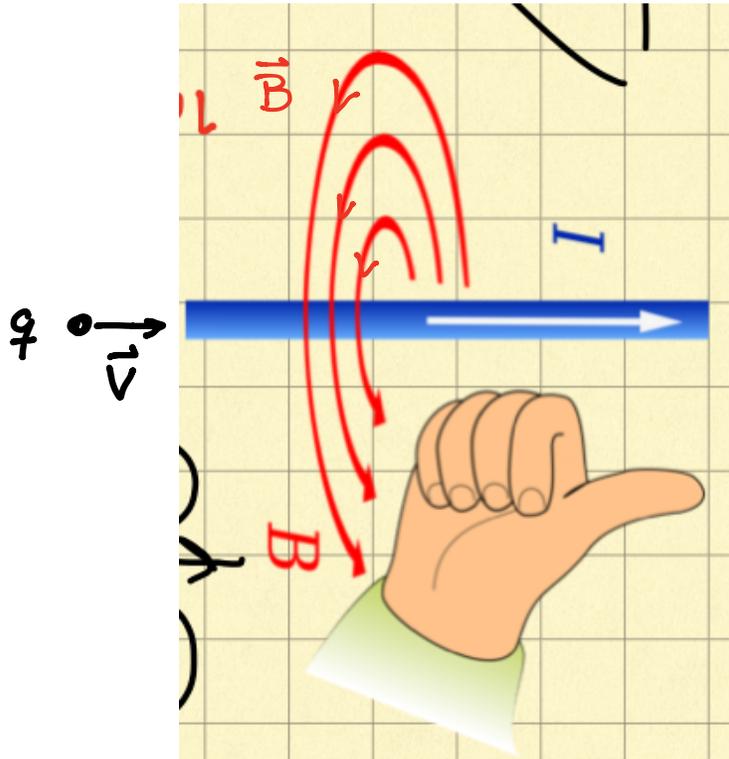
El campo  $\vec{B}$  producido por la carga en movimiento tiene la dirección tangencial al círculo perpendicular a la velocidad  $\vec{v}$  de la partícula.

Observar :

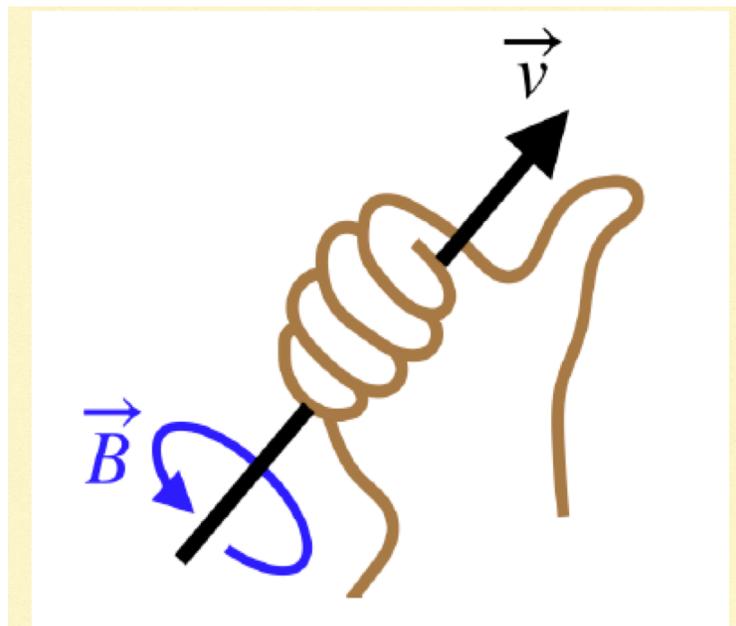
las líneas de  $\vec{B}$  son cerradas !

la dirección de  $\vec{B}$  es  $\perp$  a  $\vec{v}$  ( $\vec{B} \cdot \vec{v} = 0$ )

"regla de la mano derecha" para estimar  $\vec{B}$  dado  $\vec{v}$



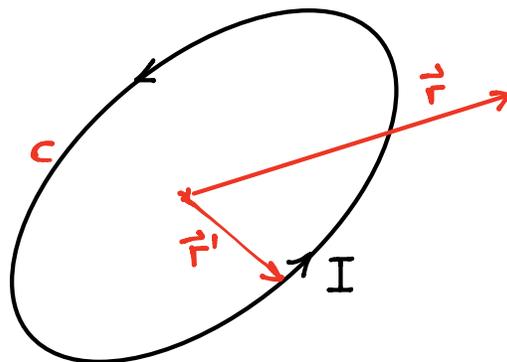
EN RESUMEN :



\* Campo magnético producido por conductor que lleve una corriente I

En este caso:

$$\vec{J} dV \rightarrow I d\vec{r}$$



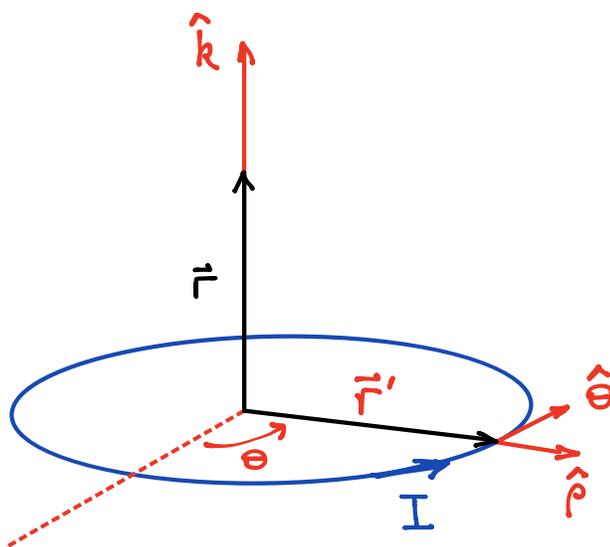
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Una aplicación:

Alambre circular de radio a

con corriente I.

$\vec{B}$  en punto del eje de simetría



Usando coord. cilíndricas,

$$\vec{r} = z \hat{k} \quad \vec{r}' = a \hat{\rho} \rightarrow d\vec{r}' = a d\theta \hat{\theta}$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 = [z^2 + a^2]^{3/2}$$

$$\Rightarrow d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = a d\theta \hat{\theta} \times [z \hat{k} - a \hat{\rho}] = az d\theta \hat{\rho} + a^2 d\theta \hat{k}$$

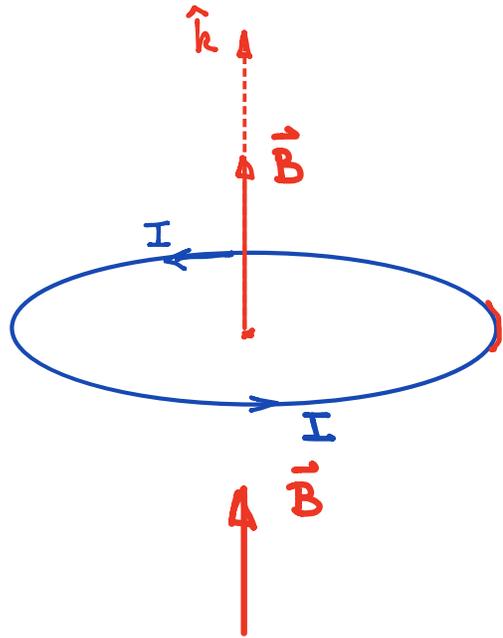
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{az}{[z^2 + a^2]^{3/2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \hat{\rho} d\theta}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a^2}{[z^2 + a^2]^{3/2}} \hat{k} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I a^2}{[z^2 + a^2]^{3/2}} \hat{k}$$


---

\* Observer  $\vec{B}(0) = \mu_0 \frac{I}{2a} \hat{k}$

\* Verificar "regla de la mano derecha"

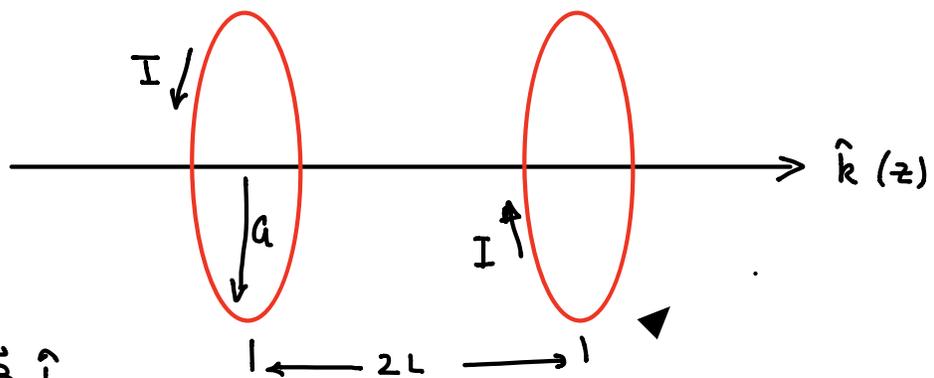


### Aplicación

---

$$\vec{B}(z) = ?$$

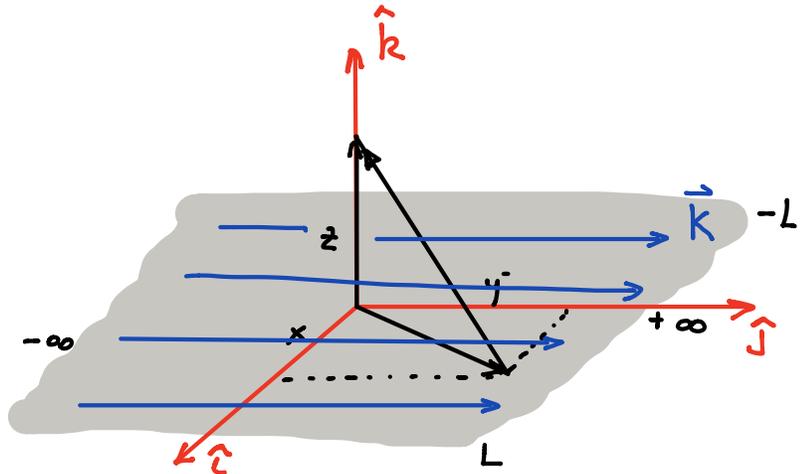
Analizar  $B_z = \vec{B} \cdot \hat{k}$



\* Película conductora plana con densidad superficial  $\vec{K}$  de corriente, uniforme.

Calcular  $\vec{B}$  en todo el espacio

Suponer  $\vec{K} = K\hat{j}$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dS$$

$$\vec{r} = z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = x\hat{i} + y\hat{j}$$

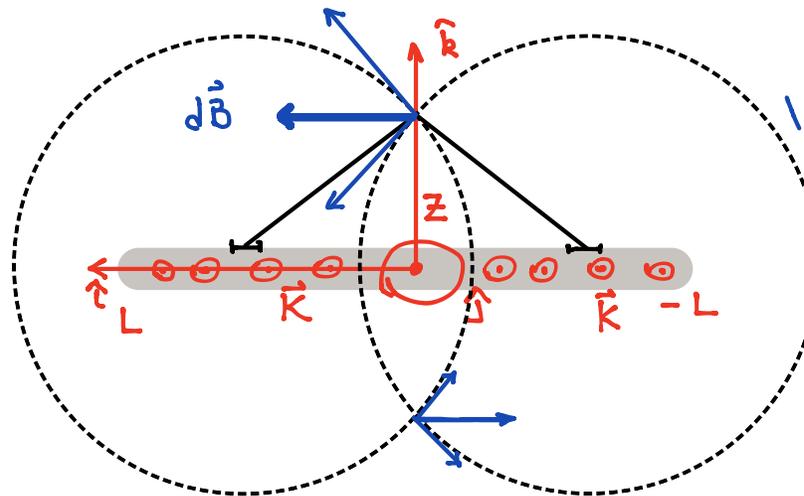
$$dS = dx dy$$

$$-L \leq x \leq L$$

$$-\infty \leq y \leq \infty$$

$$\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}') = K[z\hat{i} + x\hat{k}]$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3 = [x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} K z \hat{i} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} K \hat{k} \int_{-L}^L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx dy}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

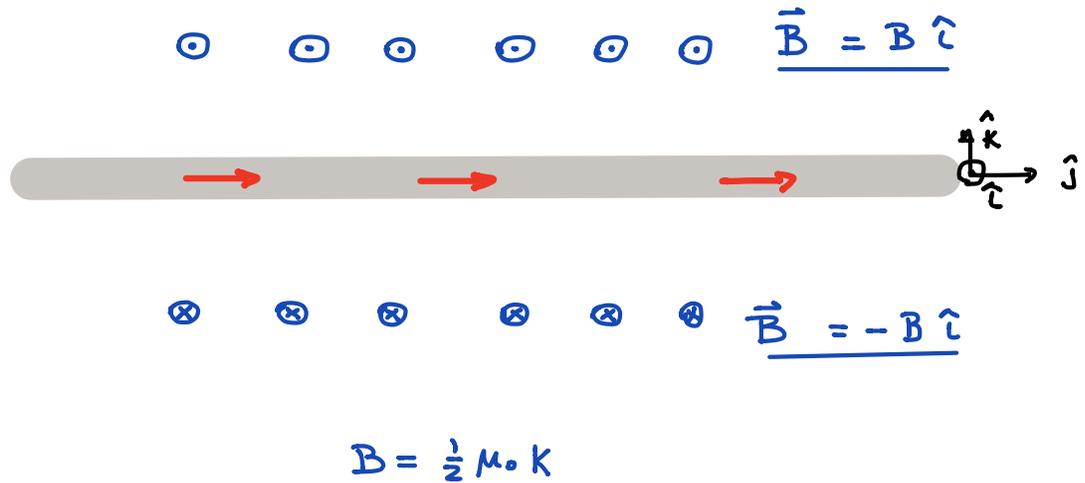
$\underbrace{\hspace{10em}}_D$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2}{x^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} K z 2 \int_{-L}^L \frac{dx}{z^2 + x^2} \hat{i} = \frac{\mu_0}{\pi} K \tan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right) \hat{i}$$

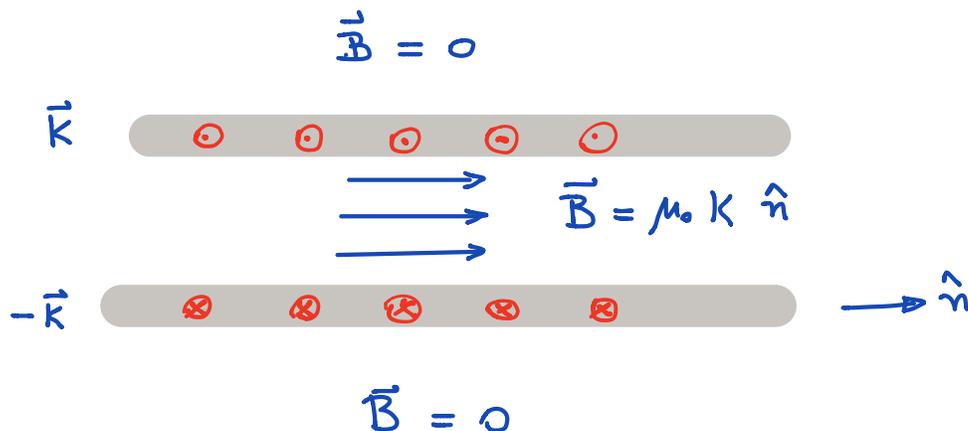

---

Limite  $L \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{\underline{\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 K \hat{i}}}$



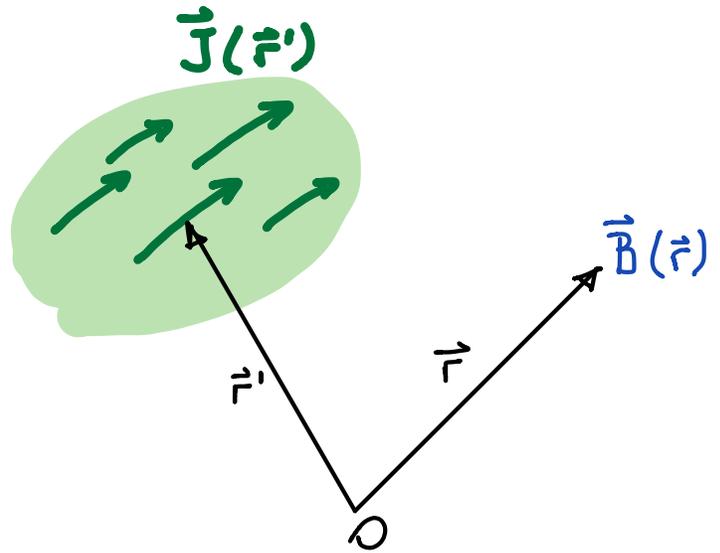
Para lámina infinita, el campo magnético es independiente de la distancia a la lámina, cambiando de dirección en un lado respecto al otro.

EXTENSIÓN: 2 placas infinitas con densidades  $\vec{K}$  opuestas



# PROPIEDADES DEL CAMPO MAGNÉTICO

La expresión más general para el campo magnético  $\vec{B}$  producido por una distribución finita de corriente  $\vec{J}$  es:



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{Vol} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times [\vec{r} - \vec{r}']}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

donde la integral es sobre el volumen que ocupa la densidad de corriente  $\vec{J}$ .

Veamos algunas propiedades que tiene  $\vec{B}(\vec{r})$

\*  $\vec{B}(\vec{r})$  es derivable del POTENCIAL MAGNÉTICO VECTOR  $\vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

en efecto, introduciendo la función vectorial  
POTENCIAL MAGNETICO VECTOR

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'$$

es directo verificar  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$   $\left( \nabla \times \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \nabla \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \dots \text{etc} \right)$

OBSERVAR: \*  $\vec{A}$  presenta una forma alternativa de calcular  $\vec{B}$

\* es el análogo magnético al potencial eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$

\*  $\vec{A}$  no es único!

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \phi(\vec{r}) \quad \phi \text{ arbitraria}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \vec{B}$$

transformación conocida como invariancia de gauge.

\* el flujo del campo magnético a través de una superficie  $S$

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{r}'$$

es igual a la integral de línea de  $\vec{A}$  según la trayectoria  $C$  que encierra a  $S$  (teo. Stokes)

DEMOSTRAR

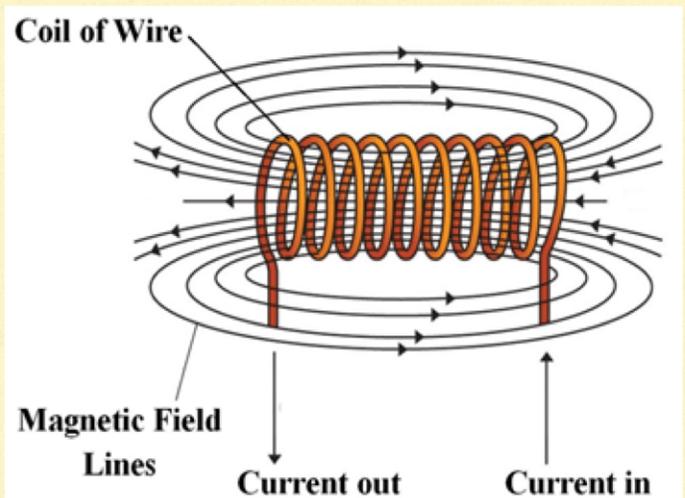
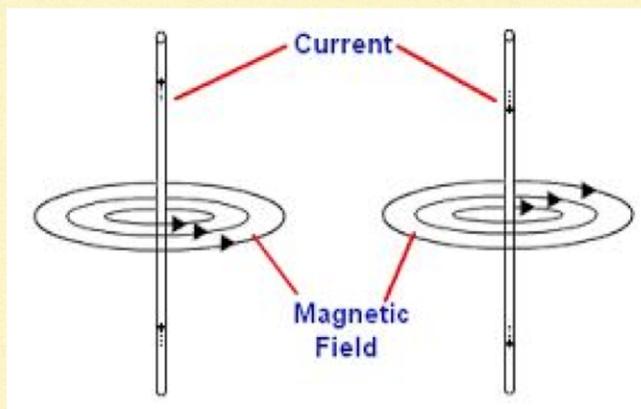
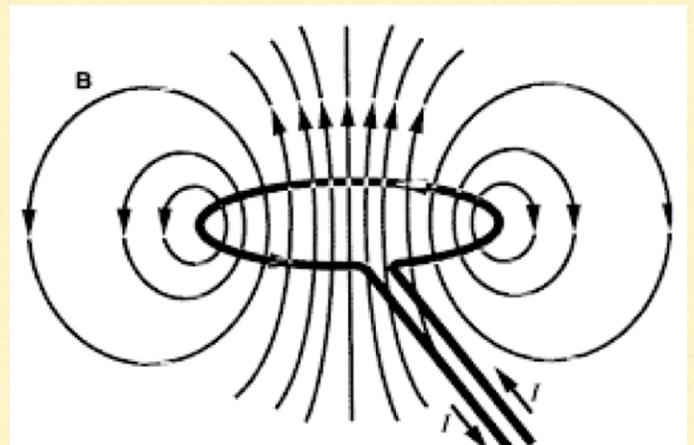
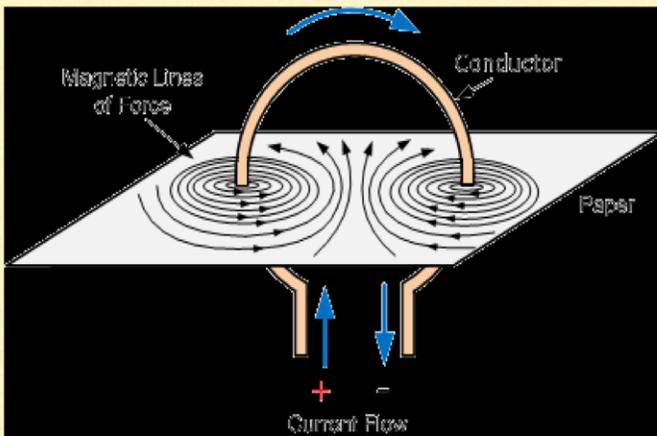
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{r} \quad (\text{superficie plana})$$

\* El campo magnético  $\vec{B}$  tiene divergencia nula

$$\underline{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}; t) = 0}$$

Significa:

- no hay cargas magnéticas que sean fuente o sumidero del campo magnético
- las líneas de campo magnético son cerradas.



\* Relación entre el campo magnético  $\vec{B}$  y la corriente ( $\vec{J}$ )

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r};t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r};t) + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}(\vec{r};t)}{\partial t}$$

---

Introduciendo:  $\vec{H}(\vec{r};t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r};t)$  intensidad de campo magnético

$\Rightarrow$  forma alternativa:  $\nabla \times \vec{H}(\vec{r};t) = \vec{J}(\vec{r};t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r};t)}{\partial t}$

Demostación:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla^2 \equiv \text{Laplaciano} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Calcular: -  $\nabla^2 \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dV' = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r})$

-  $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho(\vec{r}';t)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'$

-  $\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$

$\vec{J} \equiv$  densidad de corriente  
de conducción

\* Magnetostática ( $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ )

Las ecuaciones fundamentales del magnetismo se simplifican:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_c \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones, junta a las ecuaciones para el campo  $\vec{E}$  constituyen (casi) las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo.

\* Forma integral de ecuaciones de  $\vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

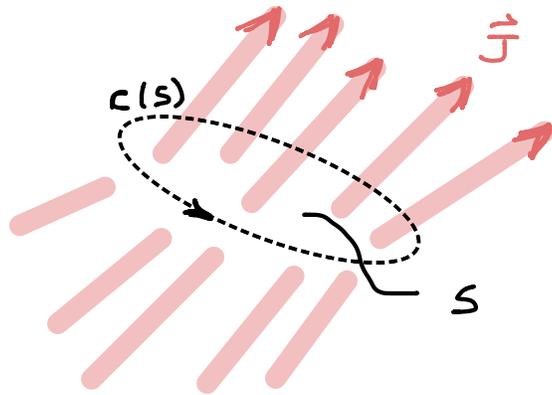
el flujo del campo magnético a través de superficie que encierra a vol  $V$  es nulo.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

luego:  $\oint_{C(S)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$  Ley circuital  
Ampère

integral de línea de  $\vec{B}$  según trayectoria  $C(S)$

corriente que atraviesa  $S$  encerrada por  $C$ .



$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

## EJEMPLOS

\* Conductor recto, muy largo, por el cual circula  $I$  constante.  
 $\vec{B}$  en todo el espacio

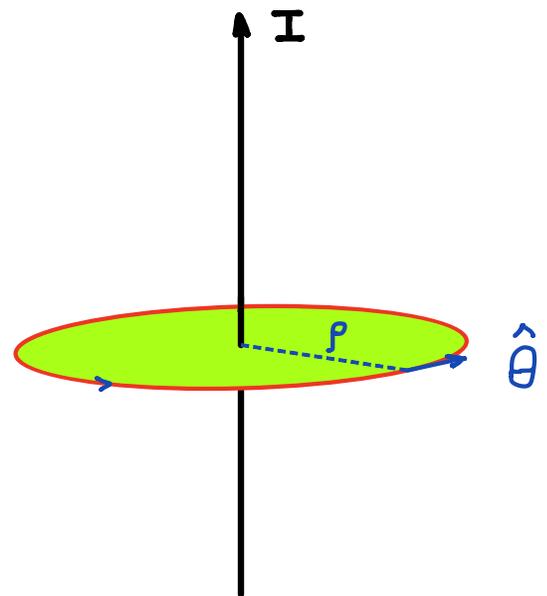
- Problema con simetría axial
- Conductor muy largo  $\Rightarrow$  no importa cuán lejos estoy de un extremo o el otro
- Se concluye:

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\theta}$$

$\rho \equiv$  distancia al conductor

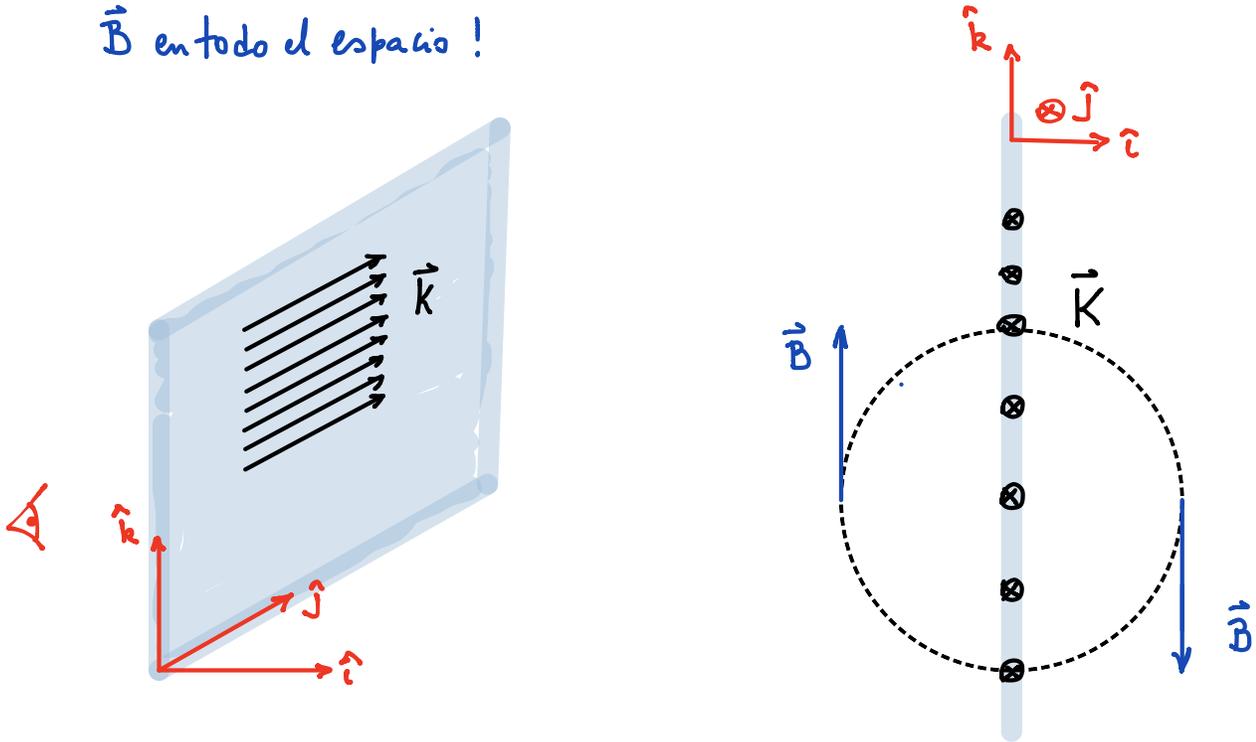
$\hat{\theta} \equiv$  dirección azimutal, consistente con dirección de  $I$

(regla mano derecha)



$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c \Rightarrow \left. \begin{aligned} \int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \mu_0 I \\ \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \oint_c B(\rho) \rho d\theta = B \rho 2\pi \end{aligned} \right\} \underline{B(\rho) = \mu_0 \frac{I}{2\pi \rho}}$$

- \* Lámina plana conductora, grandes dimensiones, por don de circule una densidad de corriente superficial  $\vec{K} [\frac{A}{m}]$ .  
 $\vec{B}$  en todo el espacio !



Un análisis de la geometría del problema indica :

- $\vec{B} = B(x) \hat{k} \quad x > 0$  (no depende de  $z$  ya que plano es  $\infty$ )  
 $= -B(x) \hat{k} \quad x < 0$  plano es  $\infty$ )
- tomar superficie  $\gamma$  aplicar ley circuital Ampère.

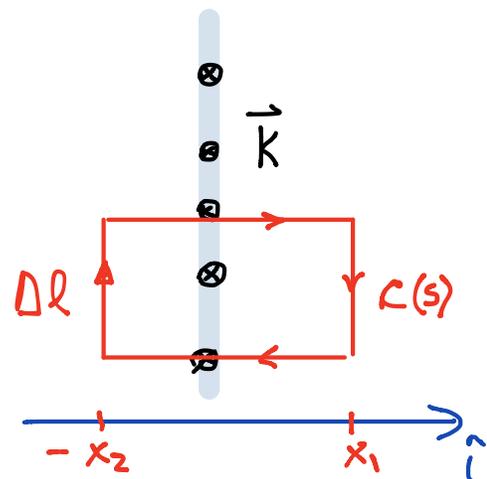
$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{C(S)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B(x_1) \Delta l + B(-x_2) \Delta l = \mu_0 K \Delta l$$

$$\Rightarrow B(x_1) + B(-x_2) = \mu_0 K$$

pero simetría de prob  $\rightarrow B(x_1) = B(-x_2) = B$

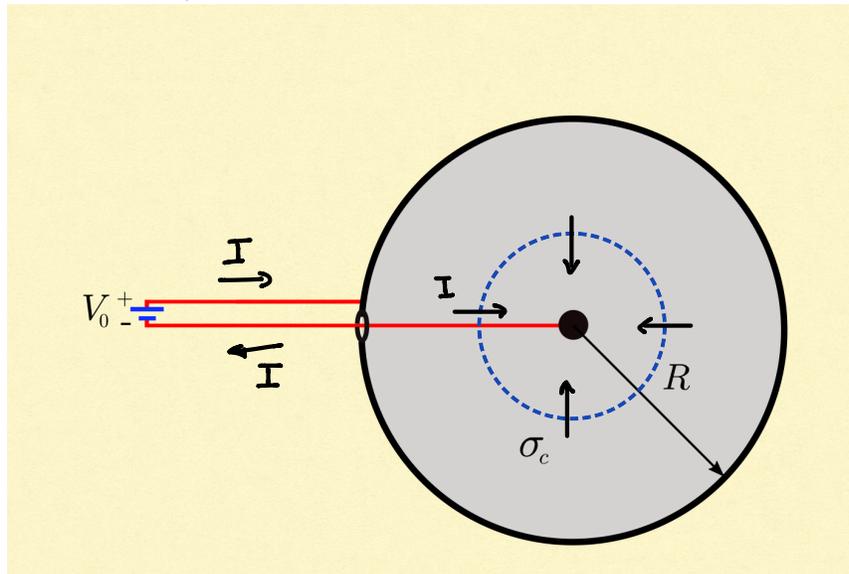
$$B \neq B(x)$$

$$\Rightarrow \underline{B = \frac{1}{2} \mu_0 K}$$



- \* Esferas conductoras conectadas a una batería. Hay un medio conductor ( $\epsilon, \sigma_c$ ) entre las esferas (radios  $a$  y  $b$ )  
Corriente que circula por el medio?

$\vec{B}$  en todo el espacio



Debido a medio conductor, circula una corriente  $I$  entre las esferas conductoras

Cálculo de corriente:

- Suponer que existe carga  $Q$  en  $r=b$  ( $-Q$  en  $r=a$ )

- Campo eléctrico  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} (-\hat{r})$

$$- V_0 = V(b) - V(a) = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

$$\Rightarrow Q = 4\pi\epsilon V_0 \frac{ab}{b-a}$$

- densidad de corriente  $\vec{J} = \sigma_c \vec{E} = \sigma_c V_0 \frac{ab}{b-a} \frac{1}{r^2} (-\hat{r})$

- corriente a través de superficie de radio  $r$ :

$$I = 4\pi\sigma_c V_0 \frac{ab}{b-a}$$

Calcular el campo magnético.

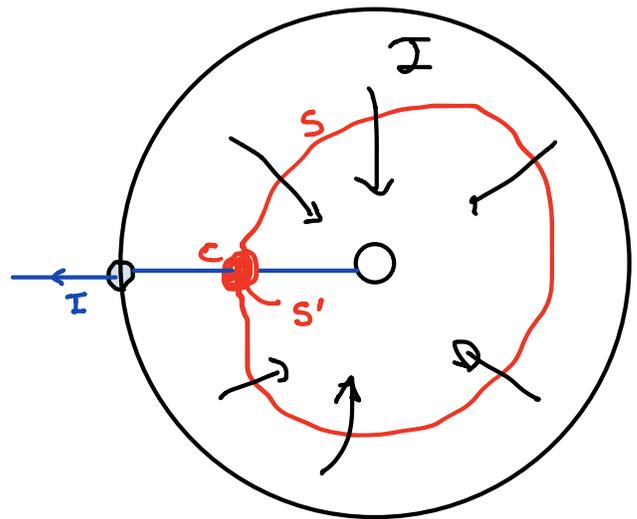
El problema es determinar  $\vec{B}$  para la corriente radial presente.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = -I + \alpha$$

$\alpha \equiv$  fracción de corriente que  
pasa por  $S'$

$$\int_{S'} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = I - \alpha$$

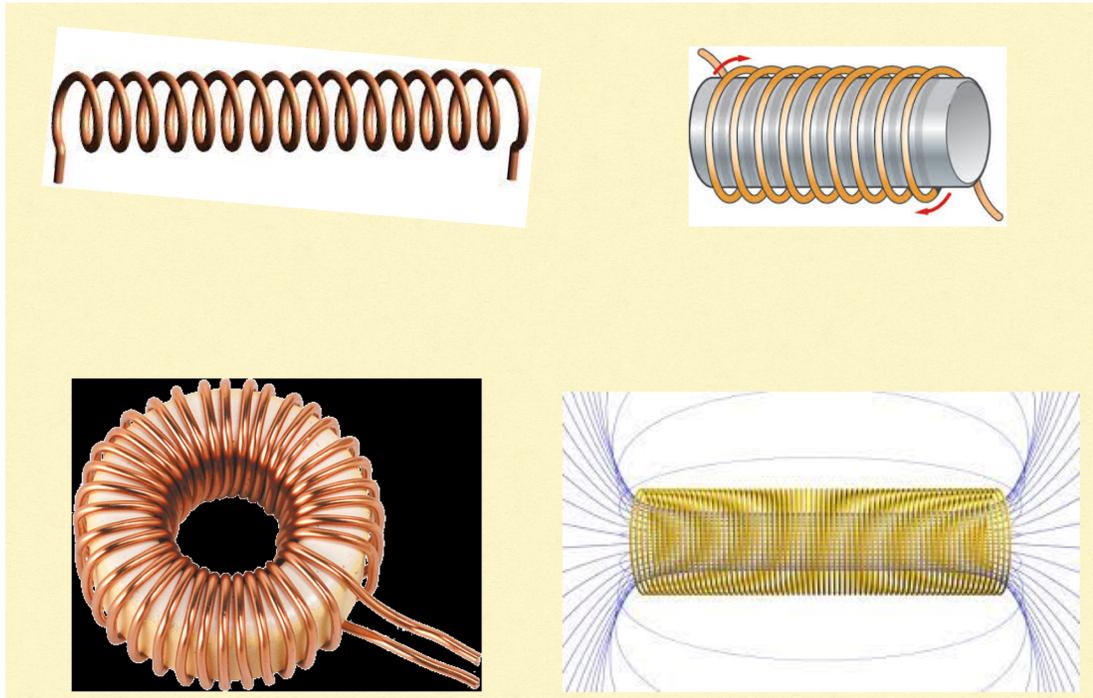


Como  $S$  y  $S'$  están limitadas por curva  $C$ , se concluye

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0 \text{ para } C \text{ arbitraria}$$

conclusión: no existe  $\vec{B}$  en el interior de las esferas  
tampoco afuera

\* Bobina muy larga ( $L \rightarrow \infty$ ), con  $m$  vueltas/largo, por la que circula corriente  $I$ . También "solenoides"  $\vec{B}$  en todo el espacio!

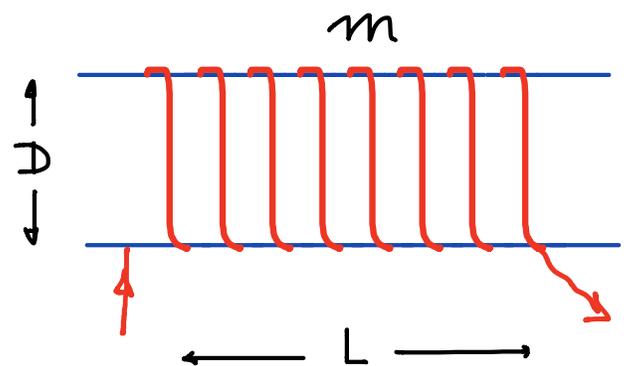


Bobina "ideal"

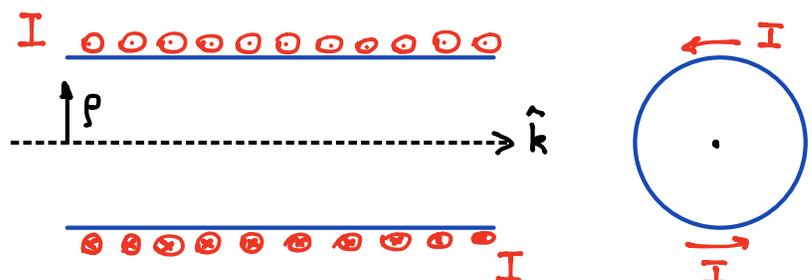
$$L \gg D$$

se desprecian efectos de borde

$$m \left[ \frac{\text{vueltas}}{\text{largo}} \right] \text{ "grande"}$$



ESQUEMÁTICAMENTE:

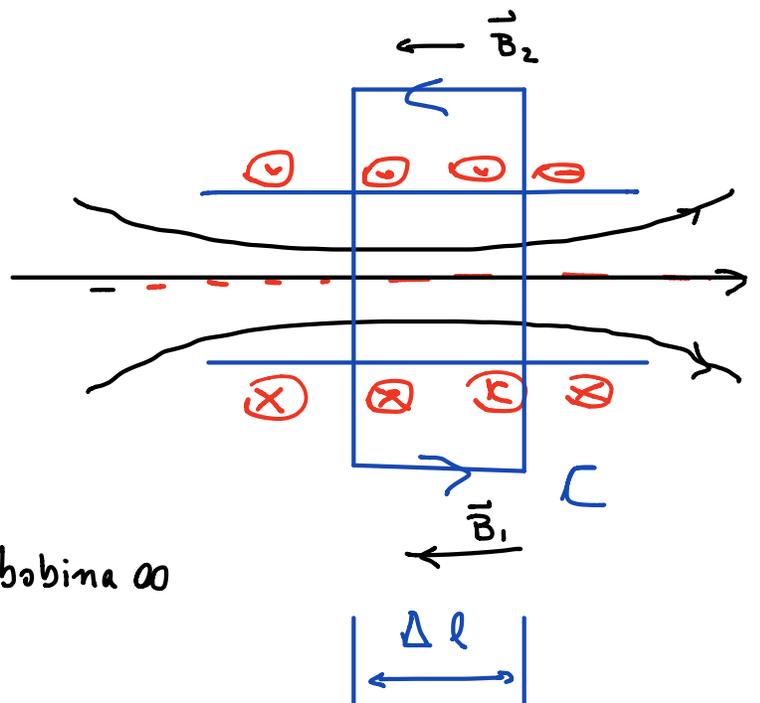


$r > \frac{D}{2}$  (afuera de bobina)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$-B_1 \Delta l + B_2 \Delta l = 0$$

$B_1 = B_2 \rightarrow 0$  para bobina  $\infty$



$r < \frac{D}{2}$

- hay simetría en torno al eje

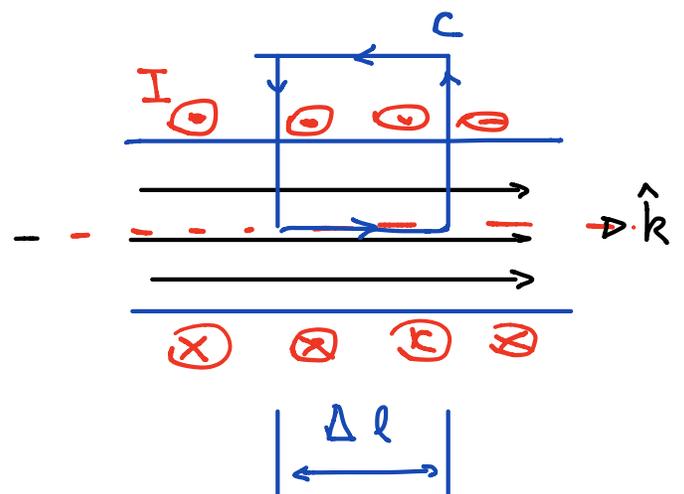
$$\vec{B} = B \hat{k}$$

en la sección de bobina

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 m \Delta l I$$

$$B \Delta l = \mu_0 m \Delta l I$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B} = \mu_0 m I \hat{k}}$$

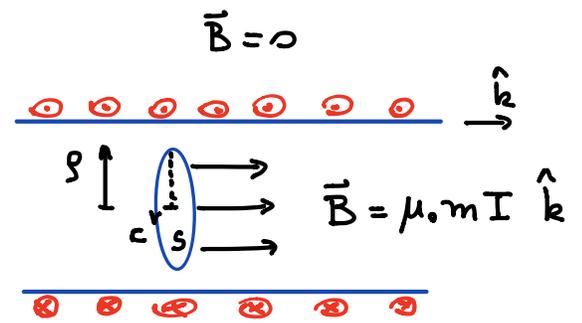


Campo magnético uniforme

en interior de la bobina y nulo fuera de ella.

+ Calcular el potencial magnético vector en todo el espacio

Se tiene la situación indicada en figura.



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = 0$$

Elegir una superficie y calcular el flujo magnético a través de ella,

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int (\mu_0 m I \hat{k}) \cdot (dS \hat{k})$$

$$= \mu_0 m I \pi \rho^2$$

$$= \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

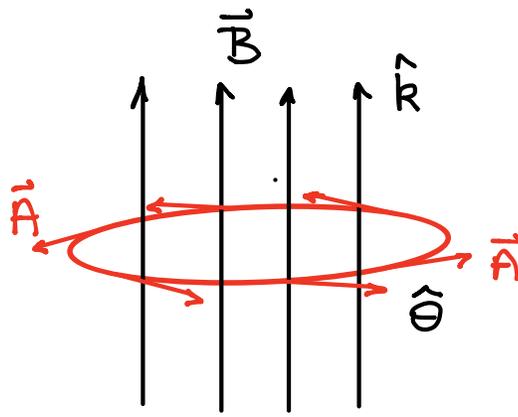
Suponiendo  $\vec{A} = A(\rho) \hat{\theta}$

$\hat{\theta}$ : dirección azimutal

y  $d\vec{r} = \rho d\theta \hat{\theta}$

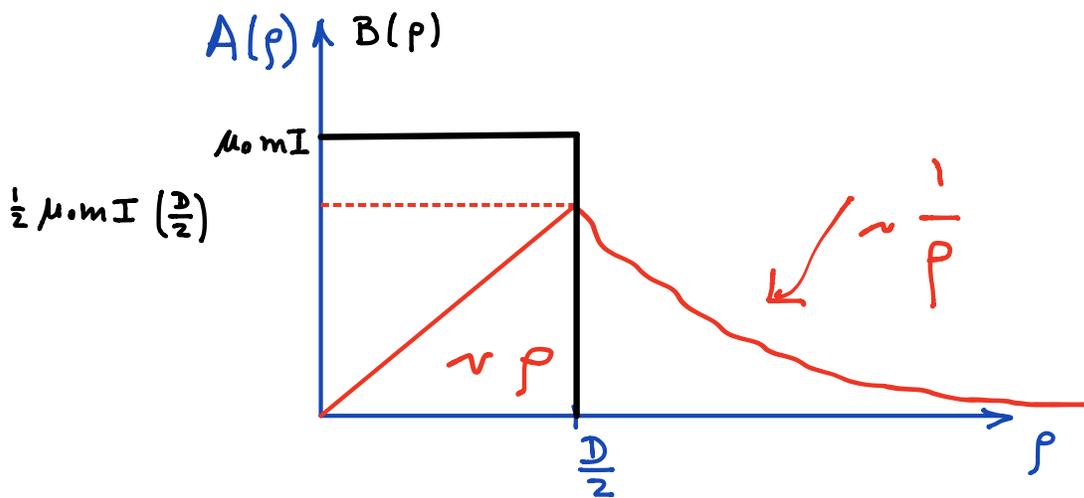
$$\Rightarrow \Phi_m = \mu_0 m I \pi \rho^2 = A(\rho) \rho 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\rho) = \frac{1}{2} \mu_0 m I \rho \hat{\theta} \quad \rho \leq \frac{D}{2}$$



Para  $\rho > \frac{D}{2}$  (fuera de la bobina)

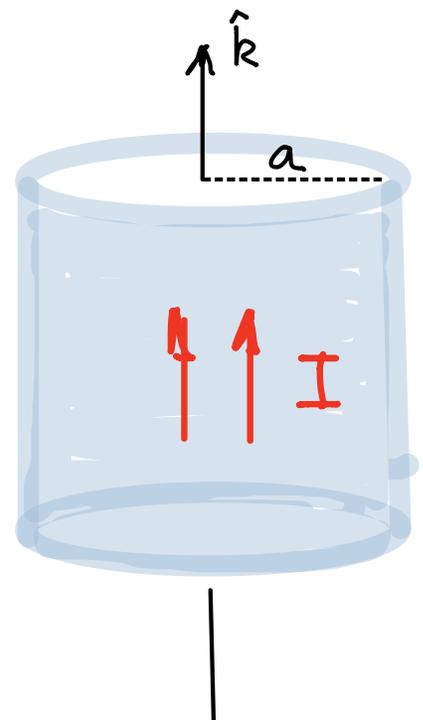
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2} \mu_0 m I \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{1}{\rho} \hat{\theta}$$



Destacar:  $\vec{B}$  sólo existe al interior de la bobina

$\vec{A}$  en todo el espacio: crece linealmente con la distancia al eje en interior de la bobina y decrece con la distancia en zona exterior a bobina

\* Conductor por el que circula corriente  $I$  uniformemente distribuida.  $\vec{B}$  ?



Existe una densidad de corriente

$$\vec{J}_c = \frac{I}{\pi a^2} \hat{k}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c \Rightarrow \oint_{C(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}_c \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\theta}$$

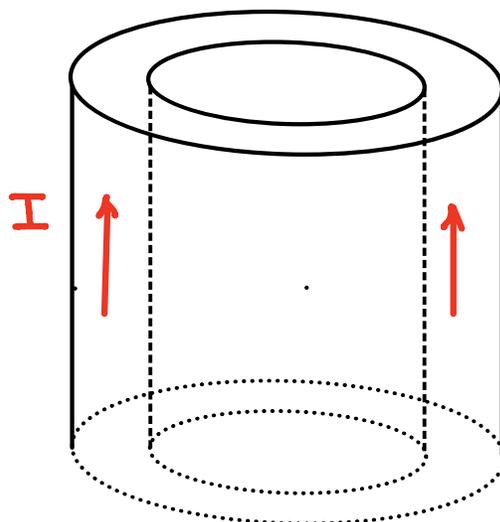
$$\Rightarrow B(\rho) = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \left(\frac{\rho}{a}\right) \hat{\theta} & \rho \leq a \\ \mu_0 \frac{I}{2\pi \rho} \hat{\theta} & \rho > a \end{cases}$$

Estudiar el caso en que el conductor tiene un núcleo de material no-conductor

y por el círculo corriente  $I$

Geometría es conocida.

$$\vec{B} ?$$



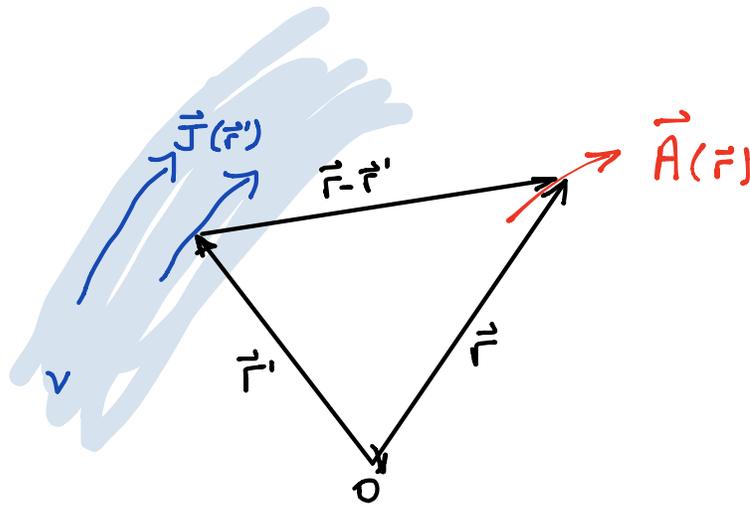
## CAMPO MAGNÉTICO LEJOS DE LA FUENTE

(expansión multipolar)

Para una distribución finita de corriente, el potencial magnético vector  $\vec{A}$  (o el campo magnético  $\vec{B}$ ) se pueden calcular de

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$



Interesa calcular  $\vec{A}$  para puntos lejanos de la fuente

$$\|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}'\|$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{[r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2]^{1/2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{[1 - 2(\frac{r'}{r})\hat{r} \cdot \hat{r}' + (\frac{r'}{r})^2]^{1/2}}$$

$$\approx \frac{1}{r} \frac{1}{[1 - 2(\frac{r'}{r})\hat{r} \cdot \hat{r}']^{1/2}}$$

$$\approx \frac{1}{r} [1 + (\frac{r'}{r})\hat{r} \cdot \hat{r}' + \dots]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\int_V \vec{J}(\vec{r}') dV'}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int_V \vec{J}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' dV'}_? + \dots$$

$$\frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')] \times \vec{r} dV'$$

Introducir:

$$\vec{m} =: \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

momento  
dipolar  
magnético

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}}_{\vec{A}_{\text{dipolar}}} + \dots$$

Aproximación  
dipolar

En el caso magnético,

a grandes distancias ( $r \rightarrow \infty$ ) comparadas con las dimensiones de la fuente, el término dipolar

domina al potencial magnético vector  $\vec{A}$  para  $r \rightarrow \infty$

- consecuencia de que no existen corrientes magnéticas!

recordar caso electrostático :  $V(r) \simeq \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}_{\text{dipolo}} + \dots$

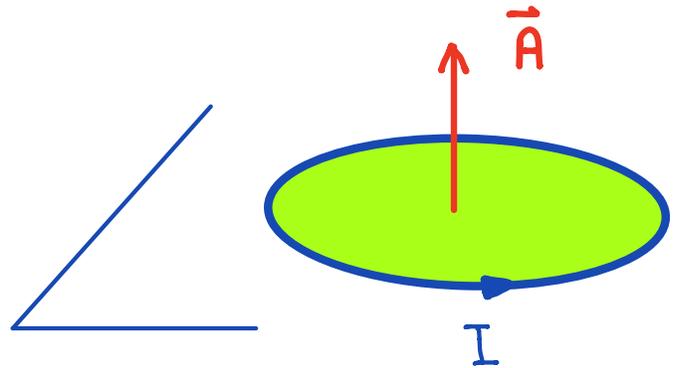
### CAMPO MAGNÉTICO EN APROXIMACIÓN DIPOLAR

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

demostrarlo

# DIPOLO MAGNETICO

Espina plana por la que  
circula corriente  $I$



Calculemos el  
momento dipolar magnético que tiene esta distribución de  
corriente

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

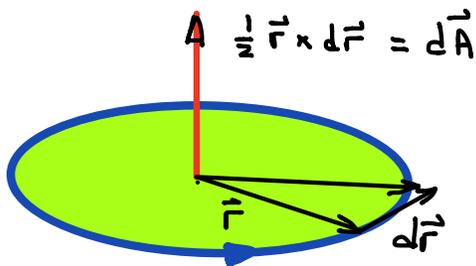
en este caso:  $\vec{J}(\vec{r}') dV' \rightarrow I d\vec{r}'$

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{I}{2} \int_C \vec{r}' \times d\vec{r}'$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{m} = I \vec{A}}$$

$\vec{A} \equiv$  área espina plana

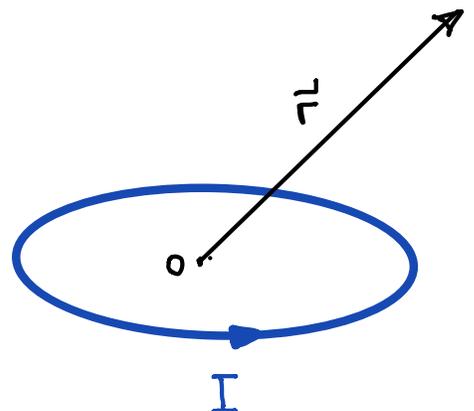
dirección asociada a sentido  
de circulación de corriente  $I$



Conclusión:

El dipolo magnético, con momento  
dipolar magnético  $\vec{m}$ , produce

$$\vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$



$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\int_V \vec{J}(\vec{r}') dV'}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int_V \vec{J}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' dV'}_{?} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \int_V [\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')] \times \vec{r} dV'$$

Introducir:

$$\vec{m} =: \frac{1}{2} \int_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$$

momento  
dipolar  
magnético

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}}_{\vec{A}_{\text{dipolar}}} + \dots$$

Aproximación  
dipolar

En el caso magnético,

a grandes distancias ( $r \rightarrow \infty$ ) comparadas con las dimensiones de la fuente, el término dipolar

domina al potencial magnético vector  $\vec{A}$  para  $r \rightarrow \infty$

- consecuencia de que no existen corrientes magnéticas!

recordar caso electrostático :  $V(r) \approx \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}_{\text{monopolo}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}_{\text{dipolo}} + \dots$

CAMPO MAGNÉTICO EN APROXIMACIÓN DIPOLAR

$$\vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}]$$

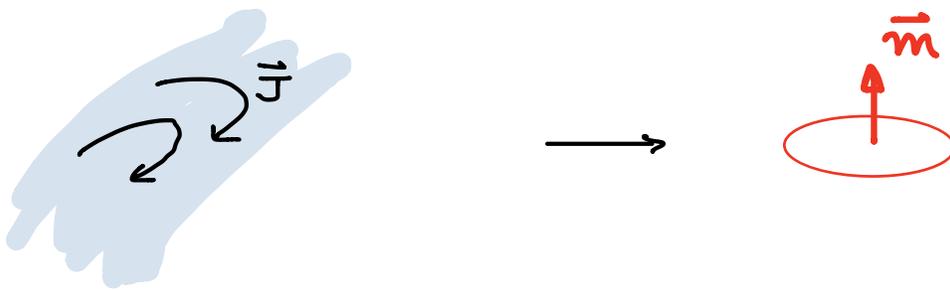
demostrarlo

## INTERPRETACION:

Para efectos de conocer el  $\vec{A}$  que produce una distribución de corriente arbitraria a grandes distancias,

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}_{\text{dipolar}} \quad (\text{término dominante } r \rightarrow \infty)$$

es decir

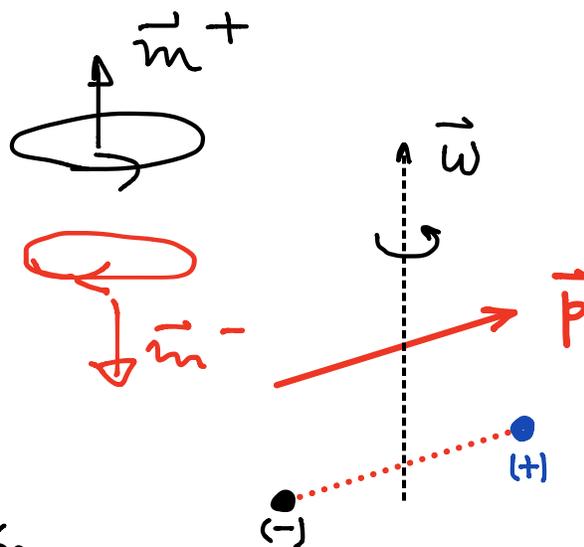


La distribución  $\vec{J}$

produce para  $r \rightarrow \infty$  un campo equivalente al de su mto mag.  $\vec{m}$

Ejemplo:

un dipolo eléctrico que rota  
con velocidad angular  $\vec{\omega}$ ,  
genera un campo magnético?



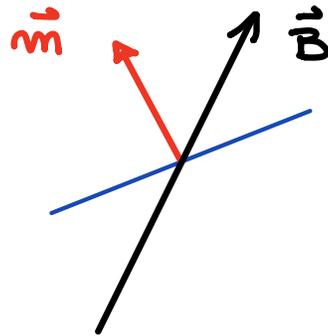
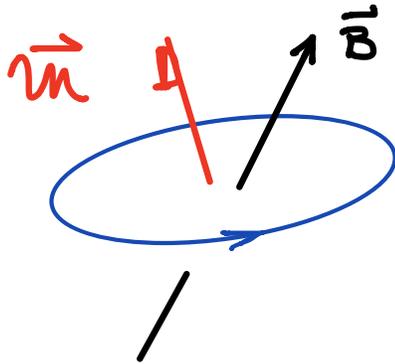
Demstrar que esta configuración  
no tiene mto dipolar magnético ( $\vec{m} = 0$ )

# Fuerzas y Torques sobre espinas en $\vec{B}$ uniforme

Este tema ya había sido discutido

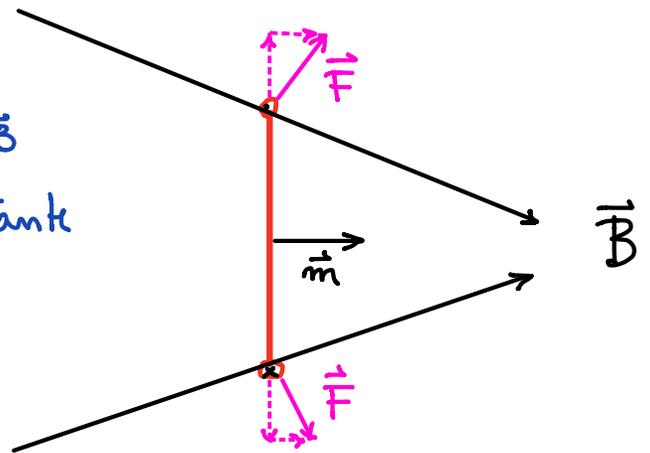
$$\vec{F} = 0$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{m} \times \vec{B}$$



Cuando el campo magnético no es uniforme, la situación se complica. Ver, por ejemplo, el caso de espina rectangular :

La fuerza sobre espina es  $\perp$  a  $\vec{B}$   
lo cual genera una fuerza resultante  
en la dirección de  $\vec{m}$



En el caso general,

demostrar que  $\vec{F} = -\nabla W_{d.m.}$   $\rightarrow$   $W_{d.m.}$ : la energía del dipolo  $\vec{m}$  en el campo  $\vec{B}$

La energía magnética para  $\vec{m}$  en presencia de  $\vec{B}$

$$dW_{d.m.} = \vec{\tau}_0 \cdot d\vec{\theta} \Rightarrow$$

$$\underline{W_{d.m.} = -\vec{m} \cdot \vec{B}}$$

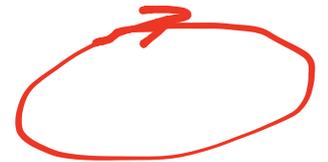
# INDUCCION ELECTROMAGNÉTICA

# FENOMENO DE INDUCCION ELECTROMAGNETICA

Experimento :

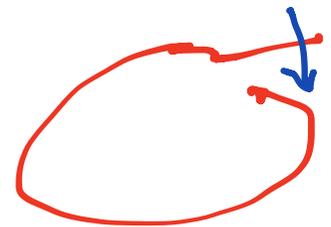
i) 2 bobinas : una con  $I(t)$

$I(t)$

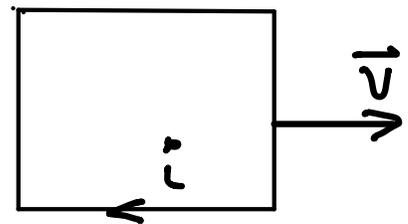
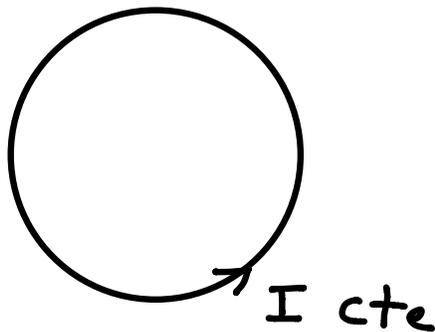


la otra abierta. Se cierra

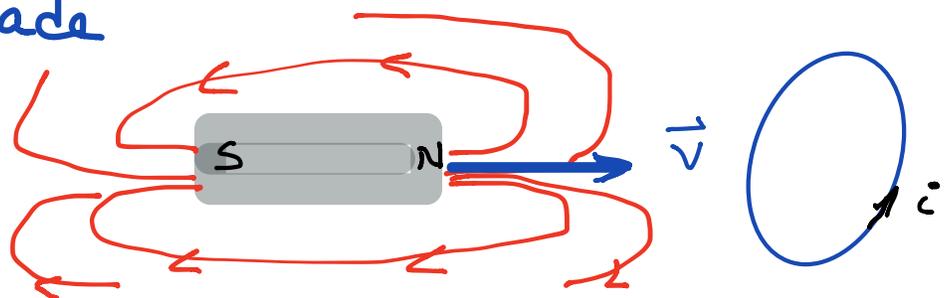
circuito ?



ii) misma configuración pero



iii) un imán se mueve hacia espira cerrada



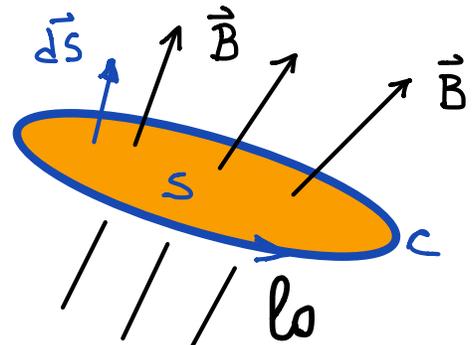
# LO COMÚN

El **flujo magnético** enlazado por espina varía en el tiempo!!

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

la elección de dirección de  $d\vec{s}$

consistente con la dirección en que se recorre  $C$



Entonces, parece ocurrir lo siguiente:

$$\Phi_m(t) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{E}}_{\text{fem (voltaje)}} \longrightarrow i(t)$$

## CONCLUSIÓN:

asociado a la variación temporal del flujo magnético se **induce** una fuerza electromotriz (fem)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Faraday  
Lenz

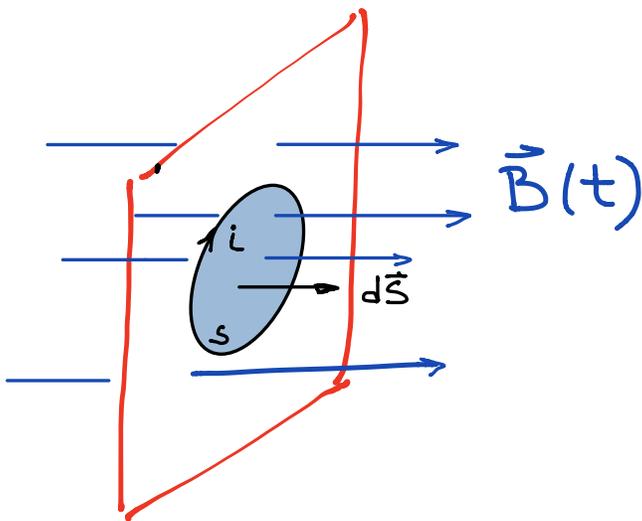
Signo (-) indica que fem inducida es tal que genera una corriente que tiende a oponerse a la variación del flujo magnético  $\Phi_m$  enlazado

La existencia de  $\mathcal{E}$  significa que existe un campo eléctrico inducido a lo largo de  $\mathcal{C}$  y tal que

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{C}(s)} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Si  $\mathcal{C} \rightarrow$  es un conductor, una corriente circulará por él.

Ejemplo:



$$\text{See } \frac{d\Phi_m}{dt} > 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} \Rightarrow$$

$$i(t) \Rightarrow$$

genera otro  
campo  $\vec{B}'$  que

tiende a cancelar  
el aumento de  $\Phi_m$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

no es demostrable  
en general

Existe cuando:

-  $\vec{B}(t) \Rightarrow \phi_m(t)$

-  $\vec{B}$  constante pero se modifica superficie donde se calcula  $\phi_m$

Sea  $\vec{B} = 0$  iz  $\vec{B} = B \hat{n}$  der

marco (azul) oscila

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \theta_0 [1 + \sin \omega t]$$

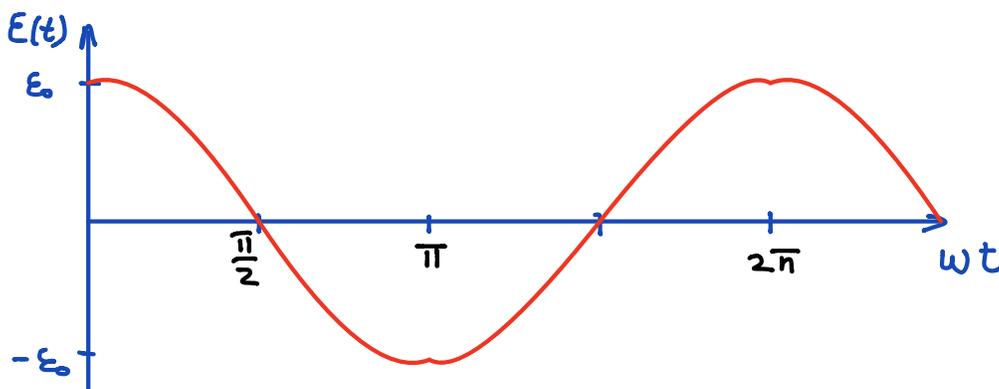
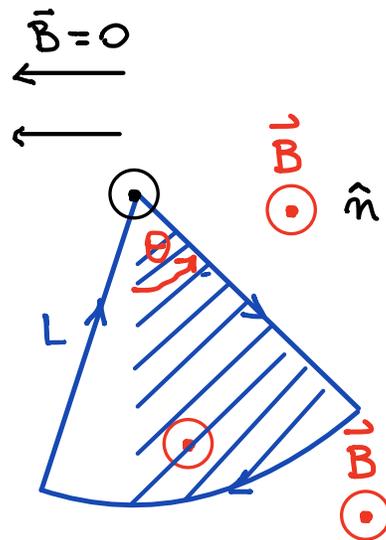
flujo magnético

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -BA$$

donde A = área donde existe  $\vec{B}$

$$A = \frac{1}{2} L^2 \theta(t)$$

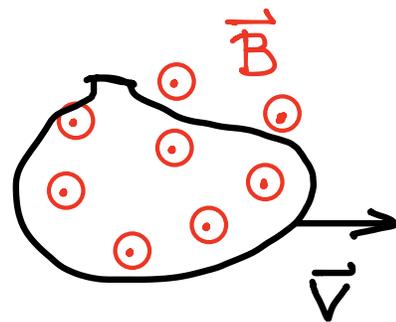
$$\mathcal{E} = + \frac{1}{4} B L^2 \omega \theta_0 \cos(\omega t)$$



La fem inducida cambia de signo a medida que el flujo magnét. aumenta o disminuye; la corriente en el marco tb. lo hace.

- $\vec{B}$  uniforme, circuito rígido que se desplaza con  $\vec{v}$

Cada elemento de carga en el circuito experimenta un campo eléctrico



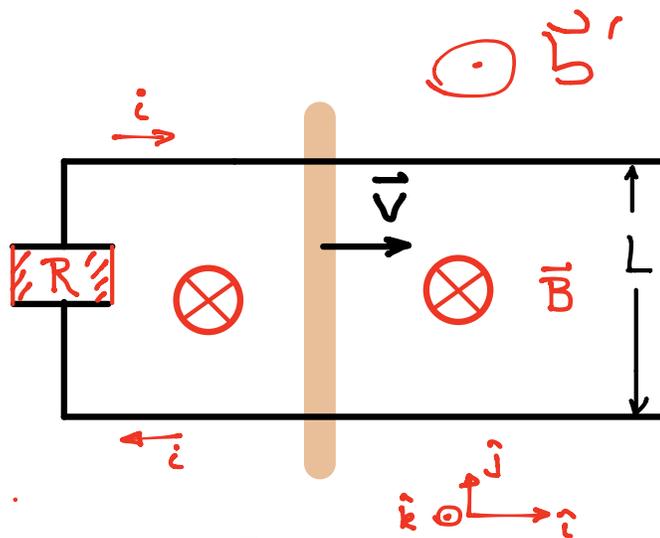
$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

entonces, existe una fem inducida  $\mathcal{E} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r}$  que es equivalente a la obtenida por la variación temporal del flujo magnético  $\Phi_m$  ( $-\frac{d\Phi_m}{dt}$ ).

## EJEMPLO

Una barra conductora desliza a velocidad constante sobre rieles conductores separados distancia  $L$  en una zona con campo magnético  $\vec{B}$  uniforme  $\perp$  a plano de los rieles. Una resistencia  $R$  se conecta entre los rieles. Otras resistencias son despreciables

- corriente por resistencia?
- potencia requerida para mover la barra?
- Comparar esa potencia a la potencia disipada en la  $R$



Sol: Existe  $\Phi_m(t) \Rightarrow \mathcal{E} \Rightarrow I$

- \* Suponer una dirección para corriente en sistema  $\Rightarrow$  definir superficie donde calcular  $\Phi_m$

$$\vec{B} = -B \hat{k}$$

$$d\vec{s} = -ds \hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x} \hat{i}$$

flujo magnético:  $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int B ds = BLx$

fem inducida  $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = -BLv \quad (\dot{x} = v)$

en trayectoria cerrada

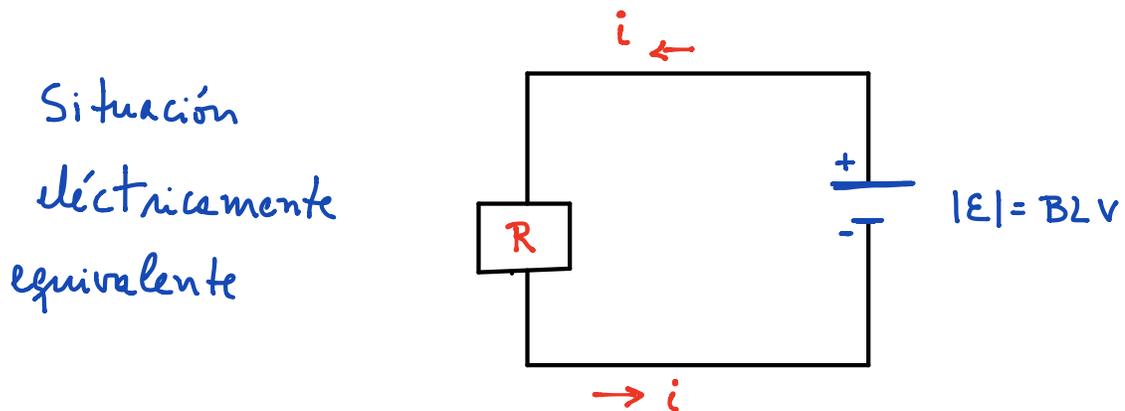
$\Rightarrow$  diferencia de potencial se aplica a resistencia

$$\therefore i = - \frac{BLv}{R}$$

(signo!)

indica que suposición original fue equivocada

La fem inducida actúa como una fuente de energía externa o batería, lo cual permite que la corriente circule



\* Potencia requerida para mover barra

$$P_{\text{barras}} = \vec{F}_{\text{mec}} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F}_{\text{mec}} = -\vec{F}_{\text{mag}} = \int i d\vec{r} \times \vec{B}$$
$$= -iLB \hat{i}$$

$$\Rightarrow P_{\text{barras}} = \frac{(BLv)^2}{R}$$

\* Potencia disipada en R

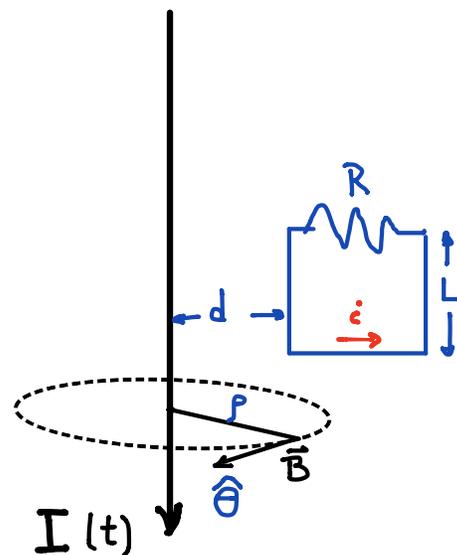
$$P_{\text{disip}} = Ri^2 = R \frac{(BLV)^2}{R^2} = P_{\text{barra}}$$

### EJEMPLO

Alambre muy largo por donde circula  $I(t)$ . Indicar corriente que circula por la R y el sentido. La espira es cuadrada.

a) alambre produce un campo magnético  $\vec{B}$

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\theta}$$



b) flujo magnético por cuadrado

$$\Phi_m = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = (L d\rho) \hat{\theta}$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad \int_s \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \Phi_m = \mu_0 \frac{LI}{2\pi} \int_d^{d+L} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi} L \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) I$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{\mu_0}{2\pi} L \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \left(\frac{dI}{dt}\right)$$

la corriente:  $i = \frac{\mathcal{E}}{R} < 0$  si  $\frac{dI}{dt} > 0 \Rightarrow$  sentido

contrario al supuesto

# FORMA DIFERENCIAL DE FARADAY - LENZ

La relación de Faraday-Lenz no da información sobre un campo eléctrico - sólo provee una diferencia de potencial en una trayectoria cerrada,



$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \int_{S(C)} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} &= - \int_{S(C)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Para cualquier  $(K)$  rígida en el espacio

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}(\vec{r}; t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}; t)}{\partial t}} \quad \text{3ª ec. Maxwell!}$$

Caso estático ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )  $\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$  Electrostática

Y qué ocurre con la idea del potencial eléctrico  $V$  tal que

$$\vec{E} = -\nabla V ?$$

En caso general, incluido el fenómeno de inducción, hay que revisar el concepto

RECORDAR :  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$\vec{A} \equiv$  Potencial Magnético Vector

Entonces: 
$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = - \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Significa: 
$$\nabla \times \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Entonces, existe la función potencial eléctrico  $V$  tal que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \nabla V$$

con lo cual,

$$\underline{\underline{\vec{E} = - \nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}}$$

El campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}; t)$  deriva de

- a) potencial eléctrico  $V$
- ⊕ b) potencial magnético vector (si  $\vec{A} = \vec{A}(t)$ )

$V$  y  $\vec{A}$  son indistinguibles como fuente de  $\vec{E}$   
↓  $\rightarrow$   
cargas corrientes

PARA : cargas eléctricas  $q$  que se mueven con  $\vec{v}$  en campo magnético  $\vec{B} \rightarrow$  hay una fuerza de Lorentz, de manera que la fuerza total es

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] = q \vec{E}'$$

La 3ª ley de Maxwell hace explícita la conexión entre la fem inducida y el flujo magnético. Así

$$\mathcal{E} = \oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \frac{d\phi_m}{dt} \quad !!$$

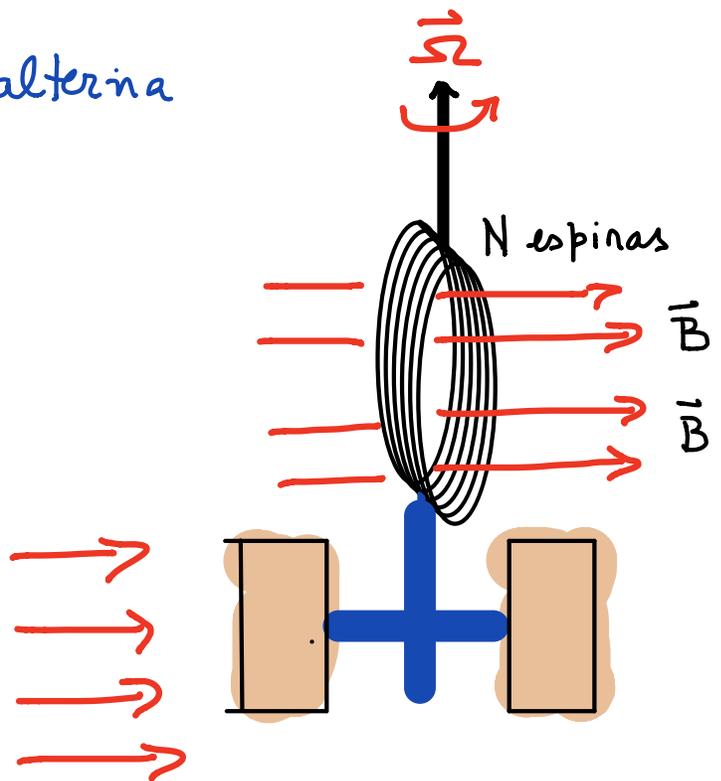
F-L

### EJEMPLO

Generador de corriente alterna

Conjunto de  $N$  espiras planas que giran con velocidad angular "constante"  $\vec{\Omega}$  en un campo magnético  $\vec{B}$  "uniforme"

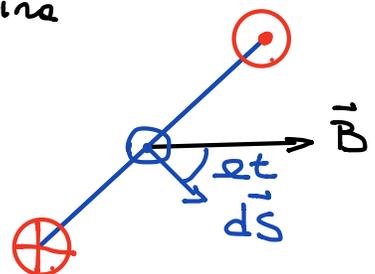
$A \equiv$  sección de cada espira



agua, viento, etc

El flujo magnético en el zado por 1 espira

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BA \cos(\Omega t)$$

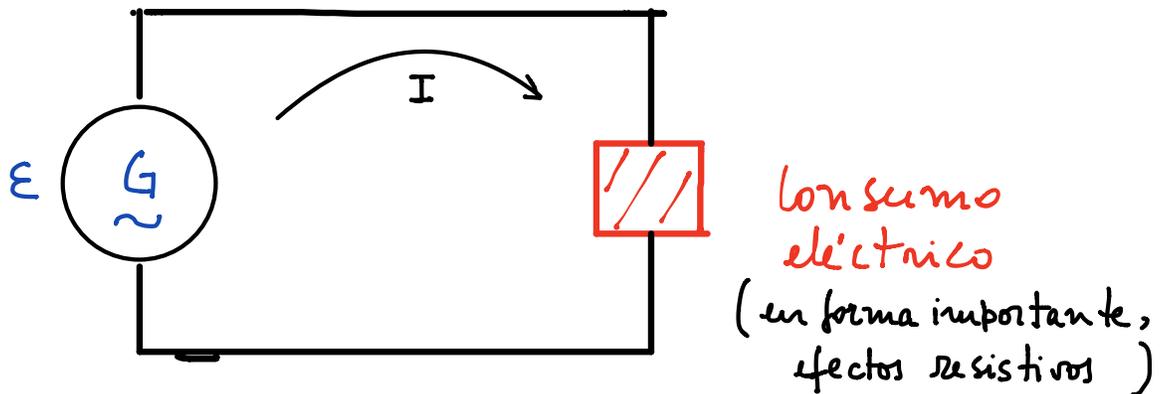


El flujo magnético total enlazado por las  $N$  espiras es

$$\Phi = N \phi_m = NBA \omega(\Omega t)$$

$\Rightarrow$  fem:  $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = NBA \Omega \sin(\Omega t)$

Este fem, inducida en el enrollado (espiras) del generador actúa como fuente externa (equivalente a una batería) para proveer energía eléctrica.



El generador provee energía por unidad de tiempo que corresponde a la potencia

$$P_G = \mathcal{E} I = NBA \Omega I \sin(\Omega t)$$

de dónde la saca?

de la energía mecánica que el aire, agua, etc entrega al generador y mantenerlo rotando con  $\vec{\Omega} \sim$  constante

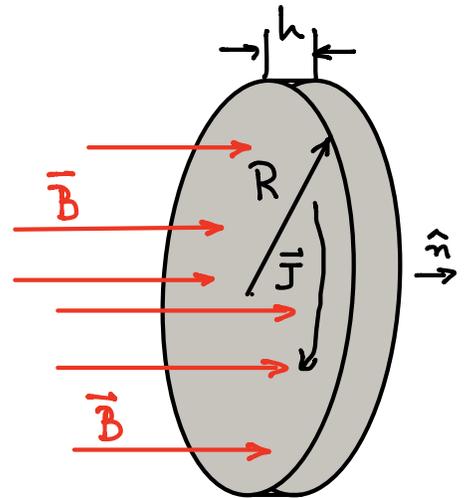
## EJEMPLO

Disco delgado conductor, espesor  $h$ ,  
radio  $R$ , conductividad  $\sigma_c$  se coloca  
en un  $\vec{B}$  uniforme alterno

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \hat{n}$$

paralelo al eje del disco

- encontrar la densidad de corriente  $\vec{J}$  inducida en disco  
como función del radio
- la potencia que puede disipar el disco

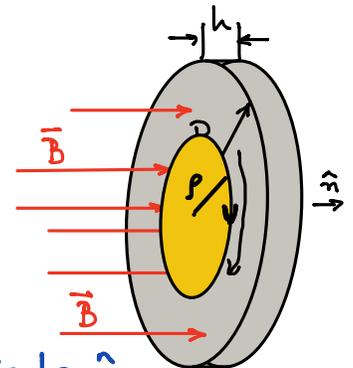


Sol: Para que circule una corriente por el disco debe  
existir un campo eléctrico  $\vec{E}$ , cuya fuente sólo  
puede atribuírse al campo magnético  $\vec{B}$  variable en el  
tiempo.

De la relación entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$   $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

tomar una superficie indicada de radio  $\rho$   
e integrar ecuación de Maxwell,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



$$\vec{E} = E(\rho) \hat{\theta} \quad d\vec{r} = \rho d\theta \hat{\theta} \quad \vec{B} = B \hat{n} \quad d\vec{S} = 2\pi \rho d\rho \hat{n}$$

Luego:

$$2\pi\rho \vec{E}(\rho) = -\dot{B} \pi \rho^2$$

$$\dot{B} = \frac{dB}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\rho) = -\frac{1}{2} \dot{B} \rho \hat{\theta}$$

con lo cual la densidad de corriente  $\vec{J}$  será

$$\vec{J}(\rho) = -\frac{1}{2} \sigma_c \dot{B} \rho \hat{\theta}$$

el sentido en que circula la corriente depende de la tasa de variación temporal del campo,  $\dot{B}$ ;

Observar: el cálculo no es exacto ya que no se considera el campo magnético que genera la corriente  $\vec{J}$  y que modifica al campo externo  $\vec{B}$

(hemos despreciado efectos autoinductivos)

La potencia disipada en el disco es

$$P \sim (\Delta V)(I) \rightarrow P_{\text{disip}} = \int_{\text{disco}} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV$$

reemplazando  $\vec{J}$  y  $\vec{E}$  se obtiene, después de integrar,

$$\underline{P_{\text{disip}} = \frac{\pi}{8} \sigma_c \dot{B}^2 h R^4}$$

reemplazar  $\dot{B}^2 = B_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$

Verificar cálculo a partir de la potencia disipada en anillos de radio  $\rho$  en disco y sumándolos

## EJEMPLO

Considerar el mismo disco anterior pero:

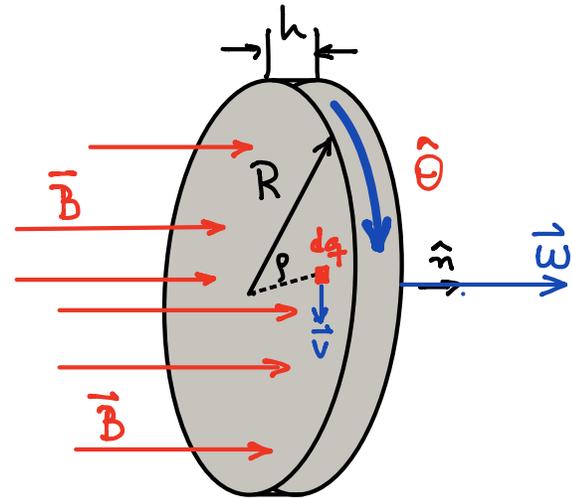
rota con velocidad angular  $\vec{\omega}$  en presencia de un campo uniforme

y constante

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n}$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{n}$$

Considerar un elemento de carga  $dq$  en el disco. Como se encuentra en movimiento (rotando) experimenta una fuerza de Lorentz

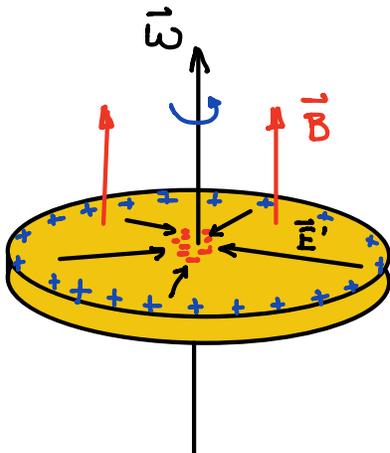


$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} = \rho \omega \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = dq \rho \omega B_0 \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} = \rho \omega B_0 \hat{\rho}$$



Ahora, existe un campo eléctrico radial que mueve carga (+) hacia el perímetro del disco y carga (-) hacia su centro cuando un campo  $\vec{E}'$  que equilibra el efecto de Lorentz

$$\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E}' = -\rho \omega B_0 \hat{\rho}$$

La fem inducida entre borde y centro del disco será

$$V(R) - V(0) = \mathcal{E} = -\int_0^R \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \omega B_0 R^2$$

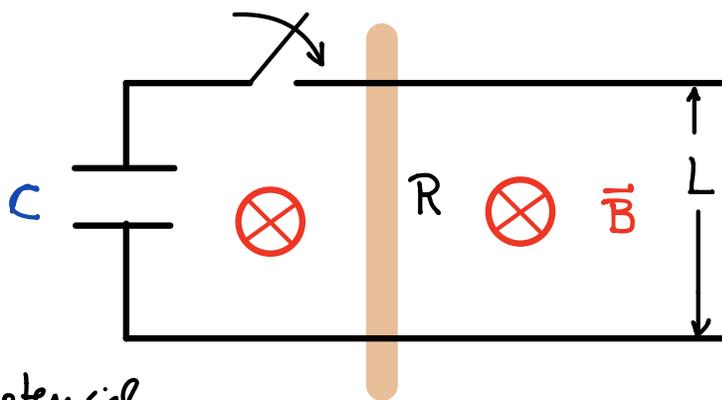
generador  
corriente  
continua

## EJEMPLO :

Se quiere mostrar como aparece el fenómeno de inducción en la descripción del siguiente problema

Un condensador  $C$ , cargado inicialmente con carga  $Q_0$ , se conecta a 2 rieles, sobre los cuales se puede desplazar una barra de resistencia  $R$ . Los rieles están en presencia de  $\vec{B}$

- Calcular la corriente que circula por la barra cuando se conecta interruptor
- Analizar como varía el potencial en condensador. Se descarga completamente? Porqué?



## COEFICIENTES DE INDUCCION:

### INDUCTANCIA PROPIA Y MUTUA

El conocimiento del flujo magnético a través de una superficie  $S$  es crucial para determinar la f.e.m. inducida según la trayectoria que encierra a  $S$ .

Veamos con mayor detalle el cálculo de ese flujo magnético.

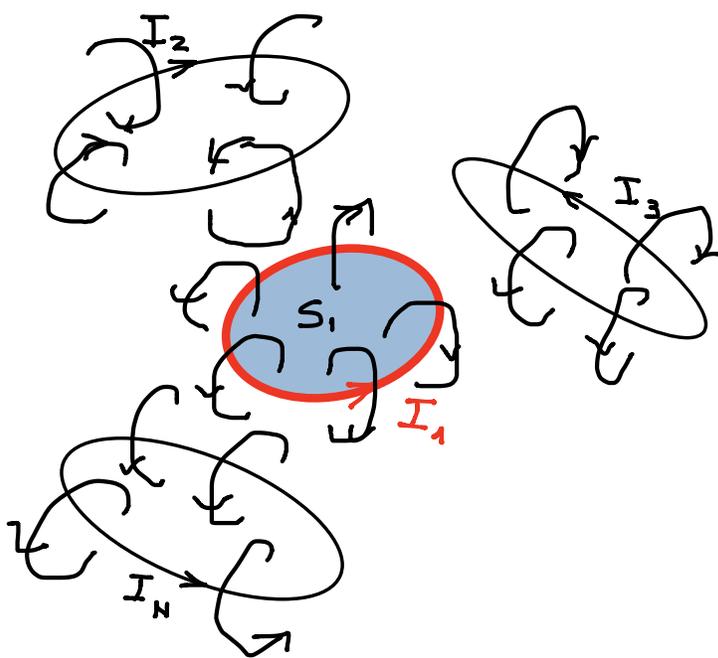
#### CONSIDERAR:

Un conjunto de circuitos rígidos  $1 \rightarrow N$  por los que circulan corrientes  $I_1, I_2, \dots, I_N$

Calculemos el flujo magnético a través de  $S_1$  (circuito "1"). Para ello necesitamos conocer el campo magnético total sobre  $S_1$ , es decir,

$$\vec{B}_{1T} \equiv \text{campo mag. total en } S_1 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_N$$

donde:  $\vec{B}_i =$  campo magnético producido por corriente  $I_i$  que circula por circuito  $i$



$$\|\vec{B}_i\| \sim I_i$$

Observar que  $\vec{B}_{1T}$  incluye el campo  $\vec{B}_1$  que genera la propia corriente  $I_1$

Por lo tanto:

$$\phi_1^T \equiv \text{flujo mag. total por circuito 1} = \int_{S_1} \vec{B}_{1T} \cdot d\vec{S}_1$$

lo que significa:

$$\phi_1^T = \sum_{i=1}^N \int_{S_1} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_1 =$$

$$\Rightarrow \underline{\phi_1^T = \sum_{i=1}^N M_{1i} I_i}$$

cuando se identifica  $M_{1i} = \frac{1}{I_i} \phi_{1(i)}$

con  $\phi_{1(i)} \equiv \int_{S_1} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_1 \equiv$  flujo magnético enlazado por circuito 1 debido al campo mag. producido por corriente  $I_i$

**IMPORTANTE:**

los coeficientes  $M_{ki}$  no dependen de la condición eléctrica en los circuitos; sólo dependen de la geometría de la configuración y del medio donde se ubica.

En general,  $\underline{M_{ke} \equiv \text{coeficientes de inducción}}$

## RESUMIENDO:

para un sistema de  $N$  circuitos rígidos,  
por los que circulan corrientes  $I_l$  ( $l=1-N$ )  
el flujo magnético total por circuito  $k$  es

$$\underline{\phi_k^T = \sum_{l=1}^N M_{kl} I_l}$$

con  $M_{kl} = \frac{1}{I_l} \int_{S_k} \vec{B}_l \cdot d\vec{S}_k$

$M_{kk} \equiv L_k \rightarrow$  Inductancia propia (coef. de autoind)  
 $M_{kl} \quad k \neq l \rightarrow$  Inductancia Mutua

## UNIDADES

Los coeficientes de inducción propia y mutua se miden  
en Henry [H]

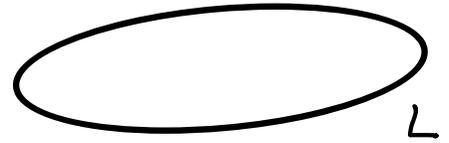
$$[L] = [M] = \frac{[\Phi]}{[I]} = \frac{T \cdot m^2}{A} \equiv \text{Henry}$$

Rango de valores típicos  $\mu H \div 20 H$

La gran diferencia tiene relación con el material (ferromagnético)  
usado en la construcción de estos dispositivos

## CASO 1 DISPOSITIVO (circuito - espira - solenoide - etc)

El coeficiente de autoinducción o inductancia propia es una propiedad asociada a la geometría del dispositivo y al medio en que funciona.



- Para calcularla :
- Suponer que circula corriente  $I$
  - calcular  $\vec{B}$  producido
  - calcular flujo magnético a través de  $S$
  - $L = \frac{\Phi_m}{I}$  (independiente de  $I$ )

Por ejemplo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rightarrow \Phi_m = \int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$
$$\downarrow$$
$$L = \frac{\Phi_m}{I}$$

A veces,  $\vec{B}$  se obtiene por ley circuital Ampère

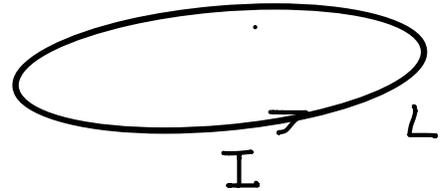
Alternative:

$$\text{recordar } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \rightarrow \Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(S)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\gamma \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (\text{parece simple, pero no lo es})$$

Qué significa lo anterior?



Cuando circula  $I$  por la espira

hay un flujo magnético enlazado por ella cuyo valor es

$$\phi = L I \quad (L \text{ es un dato del dispositivo})$$

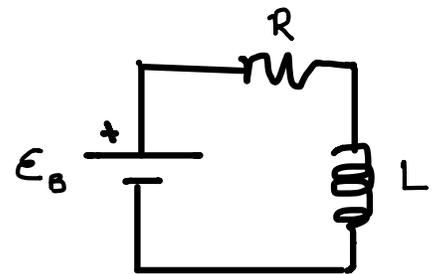
Suponiendo que, además, la espira tiene una resistencia  $R$ , se tiene:

a) conectamos una fuente constante

hay un flujo magnético  $\phi_m = L I = ct$   
y nada más ocurre

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

equivalente a tener  $L$  corto circuitado



b) conectamos una fuente  $\mathcal{E}_0(t)$

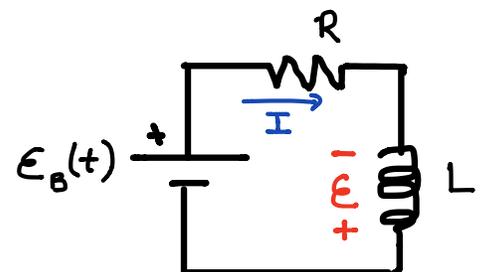
$\Rightarrow \phi(t) \Rightarrow$  f.e.m. inducida en dispositivo

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi}{dt} = - L \frac{dI}{dt}$$

en el dispositivo:

$$\mathcal{E}_0 = R I + L \frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow I = I(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sim \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$



## EJEMPLO CALCULO INDUCTANCA PROPIA

L para bobina de sección cuadrada, con N vueltas, enrolladas alrededor de un toro de revolución de radio medio  $a$  y sección  $b^2$

\* se hace circular corriente  $I$

\* Cálculo del campo magnético



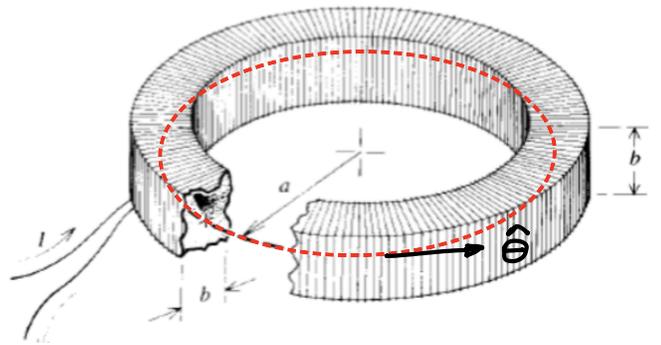
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \int_S$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 N I$$

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow 2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 N I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} \hat{\theta}$$



El flujo total a través de todas las espiras es N veces el flujo magnético a través de 1 espira,

$$\Phi^T = N \phi \quad \phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\rho = a - \frac{b}{2}}^{a + \frac{b}{2}} \frac{\mu_0 N I}{2\pi \rho} (b d\rho) = \frac{\mu_0 N I b}{2\pi} \ln \left[ \frac{2a+b}{2a-b} \right]$$

Finalmente,

$$L = \frac{\Phi^T}{I} = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln \left[ \frac{2a+b}{2a-b} \right]$$

## CASO 2 DISPOSITIVOS ( circuitos - enrollados - etc )

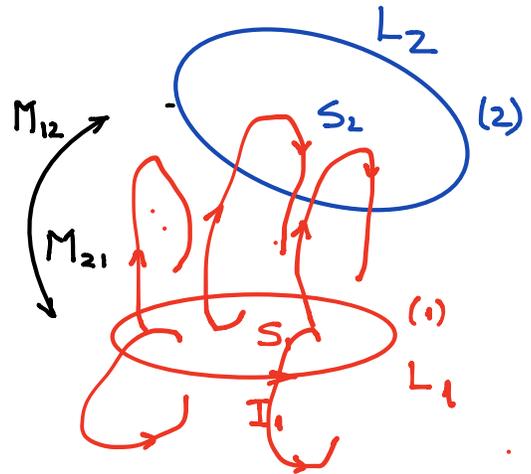
En este caso interesa ver como calcular la inductancia mutua entre 2 circuitos rígidos - además de la inductancia propia para cada uno de ellos discutida previamente.

El esquema de cálculo es similar a lo ya discutido

- Supongo que corriente  $I_1$  circula por (1)
- Calcular campo que produce  $\vec{B}_1$
- Calcular flujo de  $\vec{B}_1$  a través de  $S_2$

- la inductancia mutua  $M_{21}$

- en forma análoga



$$\phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$$

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1}$$

$$M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2}$$

Se verifica que  $M_{12} = M_{21} = M$

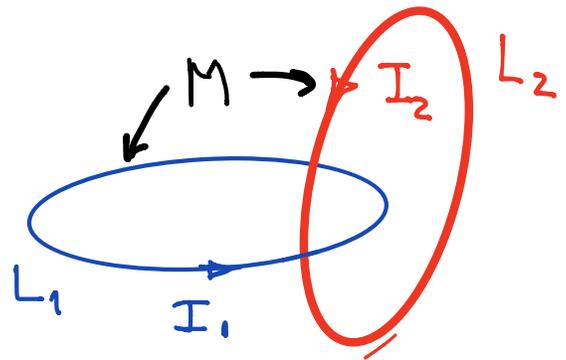
demostrar!

CASO GENERAL : dos circuitos, con  $L_1, L_2$  y  $M$ , por donde circulan corrientes  $I_1$  e  $I_2$

Veamos como se plantea

$$\phi_1 = L_1 I_1 \pm M I_2$$

$$\phi_2 = L_2 I_2 \pm M I_1$$



$\pm$  según existe reforzamiento de los flujos magnéticos — lo que depende de los sentidos relativos en que circulan las corrientes.

En (\*) existirá una f.e.m inducida

$$\underline{\mathcal{E}_1 = - \frac{d\phi_1}{dt}}$$

y

$$\underline{\mathcal{E}_2 = - \frac{d\phi_2}{dt}}$$

despreciando

$$\mathcal{E}_1 \approx - M \frac{dI_2}{dt}$$

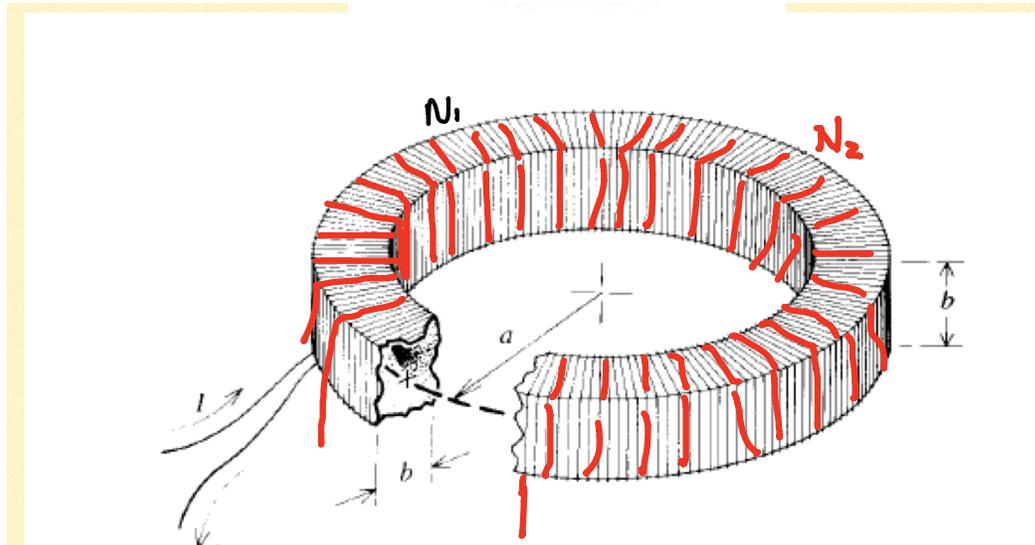
$$\mathcal{E}_2 \approx - M \frac{dI_1}{dt}$$

efectos autoinductivos

(ver por ej. caso de marco oscilante en campo magnético)

## EJEMPLO CALCULO INDUCTANCIA MUTUA

Tomar mismo toroide del ejemplo anterior, igual geometria, con 2 enrollados de  $N_1$  y  $N_2$  vueltas, uno sobre el otro.



Las inductancias propias se conocen,

$$L_{1,2} = N_{1,2}^2 \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left[ \frac{2a+b}{2a-b} \right]$$

Para inductancia mutua,

- Suponer que corriente  $I_1$  circula por bobina (1)
- Produce un campo magnético en interior del toroide

$$\vec{B}_1 = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\theta}$$

- el flujo magnético en la zado por enrollado (2) - suponiendo que no hay flujo de pérdida - será

$$\Phi_2^T = N_2 \Phi_2$$

con  $\Phi_2$  el flujo enlazado por 1 espira

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} b \ln \left[ \frac{2a+b}{2a-b} \right]$$

$$\Rightarrow M = \frac{\Phi_2^T}{I_1} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left[ \frac{2a+b}{2a-b} \right] \sim N_1 N_2 \frac{\mu_0 b^2}{2\pi a}$$

### OBSERVAR

$$M^2 = L_1 L_2$$

bajo supuesto que todo el campo que genere una bobina es enlazado por la otra y  $v \cdot v$

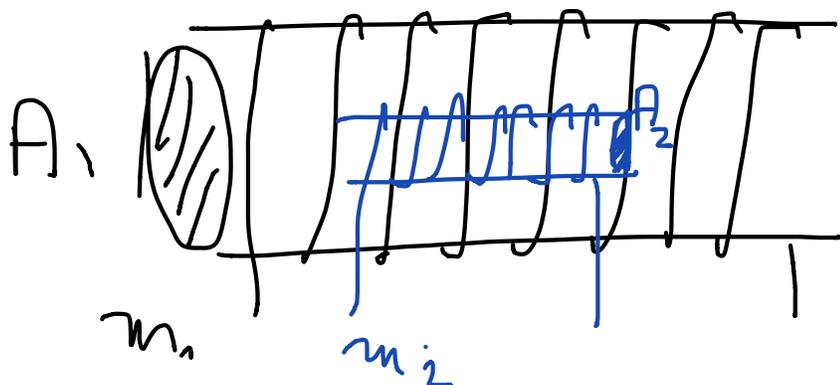
En la práctica

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

$k \equiv$  coeficiente de acoplamiento  $\leq 1$

Si  $k \ll 1 \rightarrow$  circuitos débilmente acoplados

Ejemplo: Calcular  $M$  para sistema de 2 bobinas de  $m_1$  y  $m_2$  vueltas/largo y secciones  $A_1$  y  $A_2$



# TRANSFORMADORES

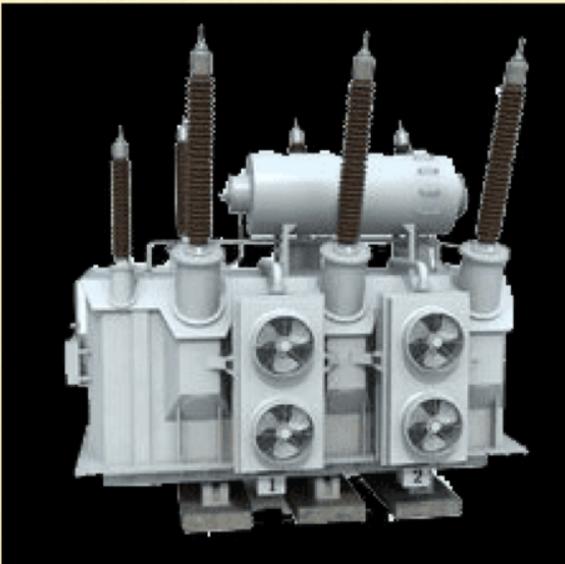
220V - 5V



120/240V - 2400V



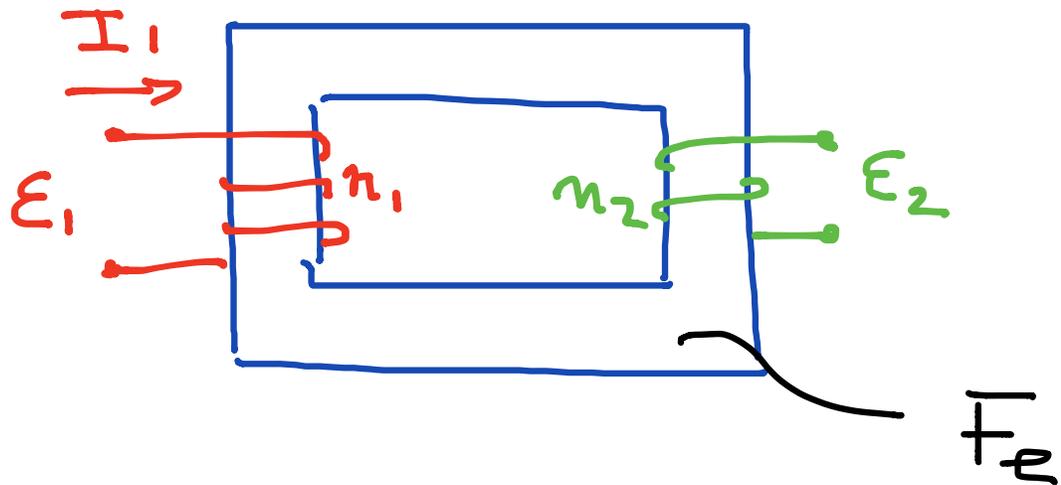
64 - 230kV



380V - 11kV



# MODELO DE TRANSFORMADOR



Dispositivo que permite transformar la diferencia de potencial entre sus enlados primarios y secundario

2 enlados alrededor de un núcleo ( $F_e$ ) común.  
Se aplica en enlado primario una fem,

$$E_1(t) \Rightarrow I_1 \text{ por enlado (1)} \Rightarrow \Phi_1 = L_1 I_1$$

en enlado (2) - abierto - se induce el campo magnético producido por (1):

$$\phi_2 = \pm M I_1$$

Luego:

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d\phi_1}{dt} = - L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

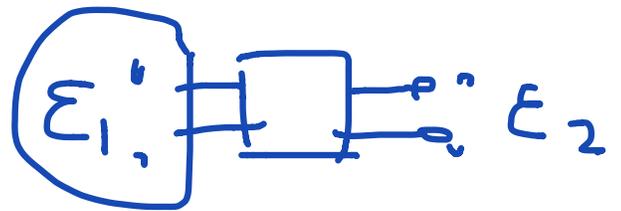
$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d\phi_2}{dt} = \mp M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{array} \right\} = \pm \frac{L_1}{M}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \approx \frac{n_1}{n_2} \approx \frac{n_1}{n_2}$$

---

$$\mathcal{E}_2 = \frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_1$$



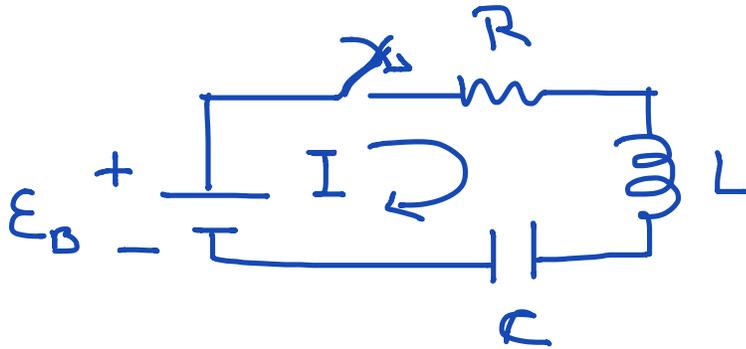
el potencial inducido  $\mathcal{E}_2$  se relaciona con el potencial en enrollado primario a través de la razón entre el n° de vueltas de sus enrollados.

Ej   $\mathcal{E}_1 = 200 \text{ V} \Rightarrow \text{para } \mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$

se requiere  $\frac{n_1}{n_2} \approx 40$

# ENERGIA EN CAMPO MAGNETICO

Motivación: circuito RLC serie



Fuente externa (batería) se conecta a un sistema con características resistivas, capacitivas e inductivas - representados por  $R$ ,  $C$  y  $L$

Inicialmente, sistema desconectado.

Al conectar, elemento inductivo tiende a oponerse a la circulación de corriente induciendo una fem en el circuito ( $\epsilon_{ind}$ )

$$\text{Luego: } \epsilon_B + \epsilon_{ind} = \underbrace{RI} + \underbrace{\frac{Q}{C}}$$

$$\text{Pero } \epsilon_{ind} = - \frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Entonces, el circuito RLC serie puede descrito por

$$\underline{\mathcal{E}_B = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt}} \quad / I$$

$$\mathcal{E}_B I = RI^2 + \frac{Q}{C} I + LI \frac{dI}{dt} \quad \int_{t_0}^t$$

integrando en intervalos temporal  $[t_0, t] \rightarrow$

$$W_{\text{Bat}} = W_{\text{disipada}} + W_{\text{en C}} + W_{\text{en L}}$$

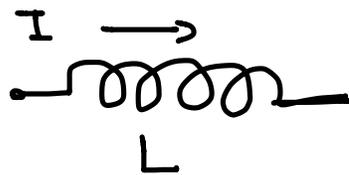
$W_{\text{Bat}}$  = energía entregada por batería en  $[t_0, t]$

$W_{\text{disipada}} = \int_{t_0}^t RI^2 dt =$  energía disipada en R (Joule)

$W_{\text{en C}} = \left[ \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right]_{t_0}^t =$  energía almacenada en C

$W_{\text{en L}} = \left[ \frac{1}{2} LI^2 \right]_{t_0}^t =$  energía magnética (almacenada en inductancia).

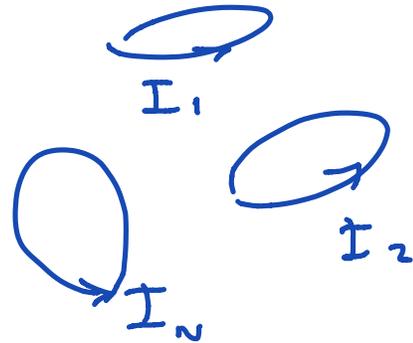
Conclusión:



$$W_L = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \phi I$$

## CASO GENERAL

Sean  $N$  circuitos rígidos por los que circulan corrientes.



Existe almacenamiento de energía - en forma magnética - porque se realizó un trabajo externo para vencer las fem inducidas que tratan de oponerse a la circulación de las corrientes

La energía magnética almacenada depende sólo del estado inicial y final del sistema. Luego,

$$\text{Sea } i_k = \alpha \bar{I}_k \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad k=1-N$$

El flujo magnético enlazado por circuito  $l$  debido a su corriente y la que circula por los otros es

$$\Phi_l^{\text{total}} = \sum_{k=1-N} M_{lk} i_k = \alpha \bar{\Phi}_l^{\text{total}}$$

La fem inducida  $\rightarrow$

$$E_l = - \frac{d\Phi_l^{\text{total}}}{dt} = - \bar{\Phi}_l^{\text{total}} \frac{d\alpha}{dt}$$

Entonces, el trabajo infinitesimal externo que se debe realizar para mantener las corrientes circulando es

$$dW_{\text{ext}} = \sum_{\ell=1}^N \mathcal{E}_{\ell} i_{\ell} dt = - \sum_{\ell} \Phi_{\ell}^{\text{total}} I_{\ell} \frac{d\alpha}{dt} dt \propto$$

y ese trabajo externo queda almacenado en forma de energía magnética,

$$dW_{\text{ext}} + dW_{\text{mag}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dW_{\text{mag}} = -dW_{\text{ext}} = \left( \sum_{\ell=1}^N I_{\ell} \Phi_{\ell}^{\text{total}} \right) d\alpha \propto$$

expresión que permite calcular la energía total magnética almacenada,

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k^{\text{total}}$$


---

$I_k$  = corriente por circuito  $k$

$\Phi_k^{\text{total}}$  = flujo magnético total enlazado por circuito  $k$

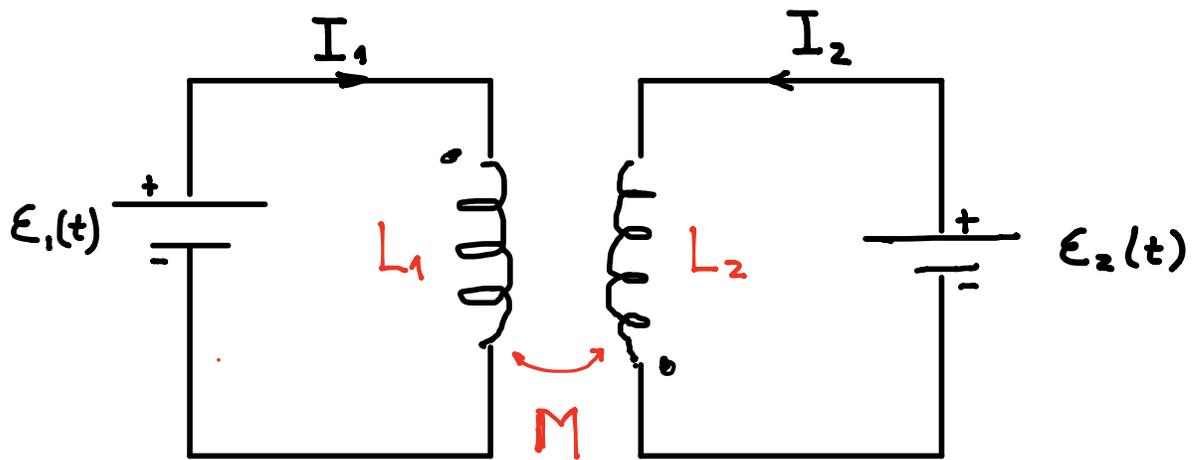
$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^N M_{k\ell} I_k I_{\ell} \quad (M_{kk} = L_k)$$


---

Ejemplo:  $k = \ell = 1 \rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} M_{11} I_1 I_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$



## EJEMPLO:

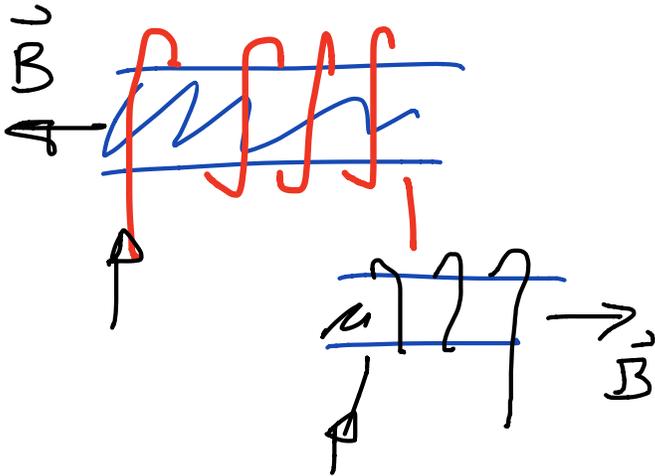


$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} M I_1 I_2$$

↓

Suma o resta según

el orden de los enrollados  
(reforzamiento o debilitamiento  
del flujo magnético)



# ENERGIA MAGNETICA COMO INTEGRAL DEL CAMPO MAGNETICO

En el cálculo de la energía magnética se distingue

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \phi_k^{\text{total}} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_k = \int_{S_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{S} \\ \phi_k^{\text{total}} = \int_{S_k} \vec{B}_k \cdot d\vec{S} = \oint_{C_k(S_k)} \vec{A}_k \cdot d\vec{r} \end{array} \right.$$

OBSERVAR: 
$$I_k \phi_k^{\text{total}} = \int_{V_k} \vec{J}_k \cdot d\vec{S} \vec{A}_k \cdot d\vec{r} = \int_{V_k} \vec{J}_k \cdot \vec{A}_k d\vec{S} \cdot d\vec{r}$$

$\downarrow$   
 $\vec{J}_k \parallel d\vec{r}$

Considerando que  $d\vec{S} \cdot d\vec{r} \equiv dV$  (elemento de volumen)

$\Rightarrow$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \phi_k^{\text{total}} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_k \int_{V_k} \vec{J}_k \cdot \vec{A}_k dV$$

$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

$V \equiv \text{todo el espacio}$

Usando identidad: 
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \underbrace{\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A}}_{\vec{B}} - \underbrace{\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}}_{\mu_0 \vec{J}}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV = \int_V \vec{B} \cdot \vec{B} dV - \oint_{S(V)} \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV$$

$V \equiv \text{todo espacio}$

con  $\vec{H} =: \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$

expresión que permite calcular directamente la energía magnética del sistema en función del campo magnético  $\vec{B}$  (y  $\vec{H}$ ).

### Ejemplo

Bobina recta de largo  $L$ , sección  $A$ , enrollado de  $N$  vueltas, por donde circula corriente  $I$ .  $W_{\text{mag}}?$

La inductancia propia de esta bobina, suponiendo que es muy larga en relación a su diámetro, es

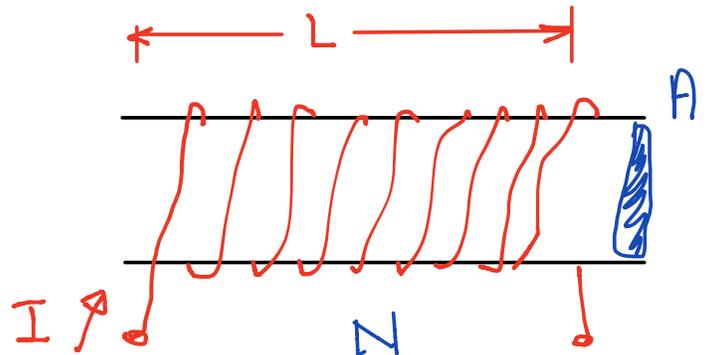
$$L = \mu_0 \left( \frac{N}{L} \right)^2 V \quad V \equiv \text{Vol bobina} = AL \quad (\text{demostrar!})$$

$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2$$

En caso de no conocer  $L$ , la energía magnética se puede calcular a partir del campo magnético  $\vec{B}$ , que sólo existe en su interior (se supone  $L \sim \infty$ )

Por ley circuital de Ampère, en interior bobina  $|\vec{B}| = \mu_0 \left( \frac{N}{L} \right) I = cte$

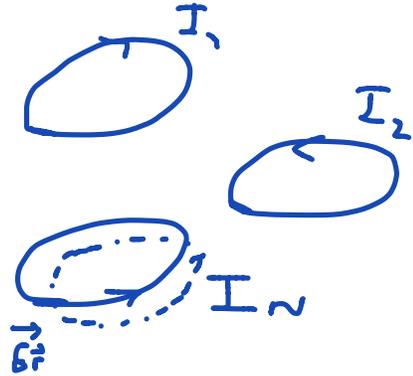
$$\Rightarrow W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 V = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{N}{L} \right)^2 I^2 V = \frac{1}{2} LI^2 !$$



## FUERZAS Y TORQUES

Considerar  $N$  circuitos  
fijos en equilibrio.

Si hago un desplazamiento  
virtual  $\delta \vec{r}$ , el trabajo  
mecánico realizado es



$$\delta W_{\text{mec}} = \vec{F}_{\text{mec}} \cdot \delta \vec{r} = - \vec{F}_{\text{mag}} \cdot \delta \vec{r}$$

al desplazar el circuito hay una variación de la  
energía magnética del sistema

$$\delta W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \sum_k I_k \delta \phi_k^{\text{total}}$$

Conservación de energía:

$$\delta W_{\text{mec}} + \delta W_{\text{bat}} = \delta W_{\text{mag}}$$

$$\text{pero } \delta W_{\text{bat}} = \sum_k I_k \delta \phi_k^{\text{total}} = 2 \delta W_{\text{mag}}$$

$$\Rightarrow \delta W_{\text{mec}} = - \delta W_{\text{mag}} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{mag}} = \nabla W_{\text{mec}}}$$

En forma análoga se calcula el torque :

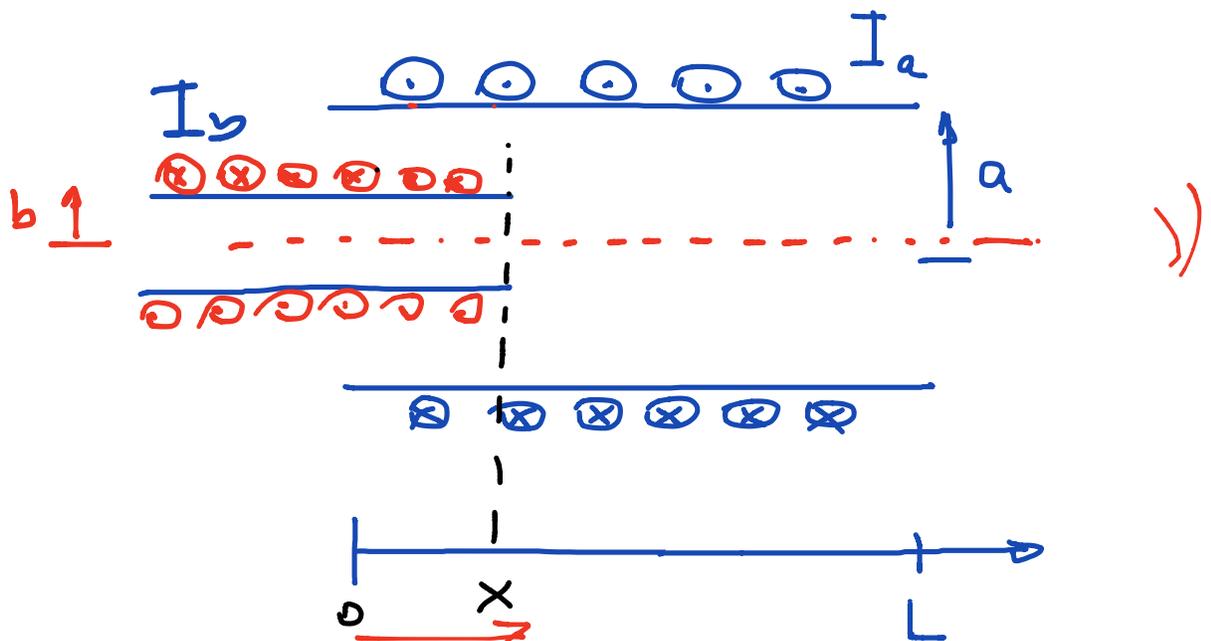
$$\vec{\tau}_{\text{mag}} \cdot \delta \vec{\theta} = \delta W_{\text{mag}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{\text{mag}} = \frac{\partial W_{\text{mag}}}{\partial \theta} \hat{n}}$$

Ejemplo:

2 bobinas, radios  $a$  y  $b$ , corrientes  $I_a$  e  $I_b$   
 $m_a$  y  $m_b$  vueltas/largo

Calcular fuerza sobre bobina interior



# CONDICIONES DE BORDE

Interesa conocer el comportamiento de los campos magnéticos  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en la superficie de separación entre 2 medios.

los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son solución de, cuando no hay dependencia temporal,

$$\underline{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\underline{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$$

( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$   
en vacío)

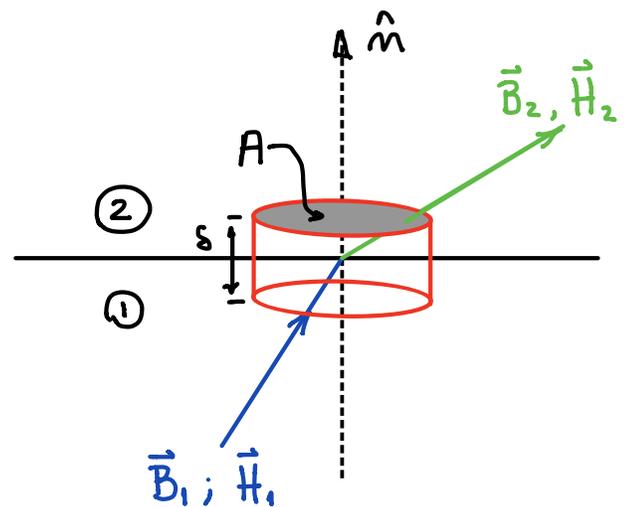
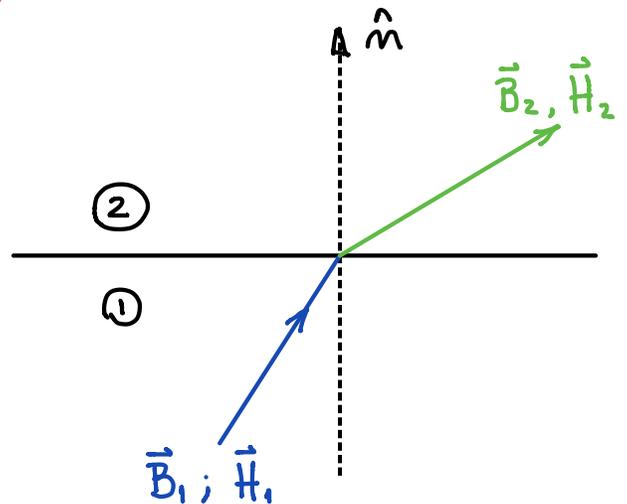
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

\* Condición para  $\vec{B}$ :

Integrar  $\nabla \cdot \vec{B}$  en volumen gaussiano indicado en figura

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_{S(r)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

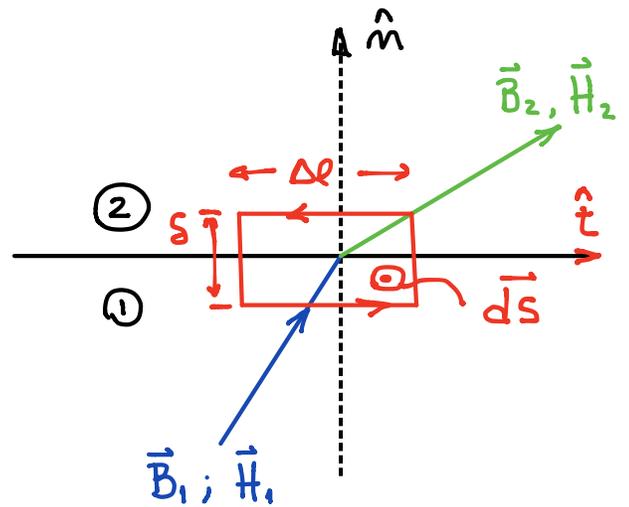
$$\text{para } \delta \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0}$$



las componentes normales (a la superficie) de  $\vec{B}$  se conservan (siempre)

## \* Condición para $\vec{H}$ :

Como interesa conocer qué ocurre en la superficie, suponer que existe una densidad de corriente superficial  $\vec{K}$  en ella. Luego integrar  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  en la superficie indicada :



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \rightarrow \quad \oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Observar:  $d\vec{r} = dl \hat{t}$        $d\vec{S} = \underbrace{dS}_{ds} dl \hat{t} \times \hat{n}$

$$\Rightarrow \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{J} \cdot \hat{t} \times \hat{n} \delta \Delta l = \vec{K} \cdot \hat{t} \times \hat{n} \Delta l \quad (\vec{K} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \vec{J} \delta)$$

concluyéndose:  $(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \hat{t} \Delta l = \vec{K} \cdot \hat{t} \times \hat{n} \Delta l$

$$\Rightarrow \underline{\hat{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{K}}$$

existe una discontinuidad en las componentes tangenciales (a la superficie) del campo  $\vec{H}$  (o  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ).

Si no hay corriente en superficie ( $\vec{K} = 0$ )  $\Rightarrow \underline{\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0}$

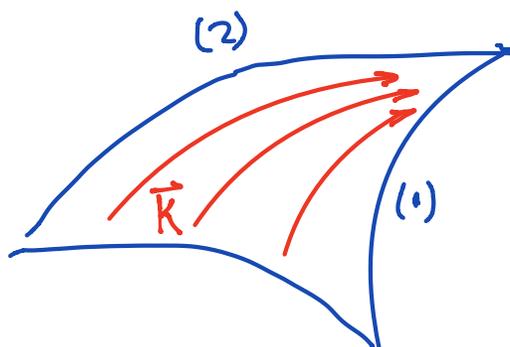
o, equivalentemente, se conservan las componentes tangenciales

## EJEMPLO

Considerar una cáscara conductora muy delgada, por lo que circule una densidad de corriente  $\vec{K}$ .

Se quiere conocer el campo magnético que genere en puntos infinitamente próximos a la cáscara.

En general,  $\vec{K}$  es una función de posición,  $\vec{K} = \vec{K}(\vec{r})$



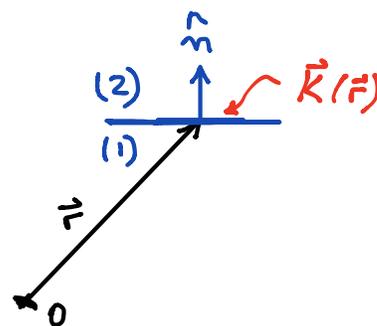
Como se trata de calcular

el campo a ambos lados de la superficie pero muy cerca a ella, éste es simétrico con respecto

a la superficie

$$\vec{H}_2 = -\vec{H}_1 = \vec{H}$$

y aplicando condición de borde



$$2\hat{n} \times \vec{H} = \vec{K} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{H} = \frac{1}{2} \vec{K} \times \hat{n}}$$

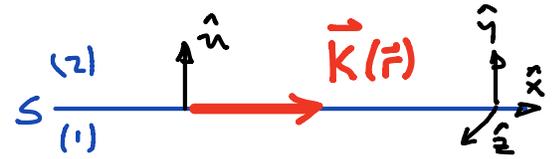
$\hat{n}$  : normal a superficie

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{en medio (2)}$$

Aplicación: Lámina plana, infinita, recorrida por  $\vec{K}(\vec{r})$  en dirección constante

$$\vec{K} = K(r) \hat{x}$$

$$\hat{n} = \hat{y}$$



$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0}{2} K(r) \hat{x} \times \hat{y}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} K(r) \hat{k} \quad \text{en parte superior}$$

$$= - \frac{\mu_0}{2} K(r) \hat{k} \quad \text{en parte inferior}$$

ambos valores justo fuera de superficie. Después cambia de dirección dependiendo del valor de la corriente sobre la superficie.

Si  $\vec{K}$  uniforme,  $\vec{B}$  es uniforme en todo el espacio y cambiando de signo a un lado c/r al otro del plano

# CAMPOS MAGNETICOS EN MATERIALES

# MAGNETISMO EN LA MATERIA

PREGUNTA:

Cómo se modifica  $\vec{B}$  (campo magnético) en un medio material?

Porqué debería modificarse?

Porqué hay algunos materiales "magnéticos" y otros no?

Porqué son afectadas por un campo magnético externo y otros no?

LAS RESPUESTAS SE RELACIONAN CON LA ESTRUCTURA ATÓMICA DE LA MATERIA

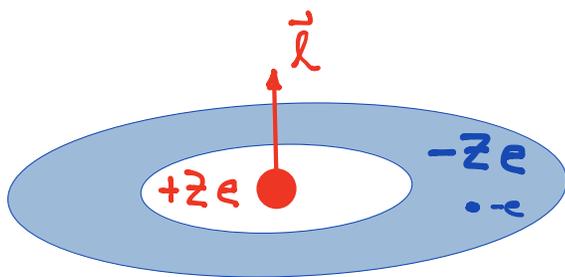
En los átomos, cada electrón orbita alrededor de su núcleo y rota alrededor de un eje interno (spin), generando corrientes que producen  $\vec{m}$  (momento dipolar magnético) que distribuidos

$$\text{al azar} \Rightarrow \sum_i \vec{m}_i = 0$$

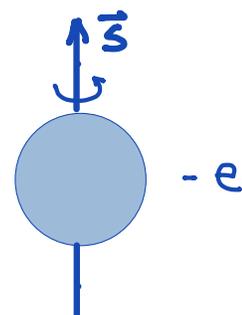
$$\text{salvo los ferromagnéticos} \rightarrow \sum_i \vec{m}_i \neq 0$$

EJEMPLO:

Atom	Magnetic Moment ( $10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ )	
H	9.27	1 electron
He	0	2 electrons
Li	9.27	3 electrons
O	13.9	
Na	9.27	11 electrons
S	13.9	



$$\vec{m}_l \sim \vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$\vec{m}_s \sim \vec{s} \quad (\text{spin})$$

$\vec{l} \equiv$  moment angular orbital

$$\underline{\vec{m}} = c \hbar \vec{J}$$

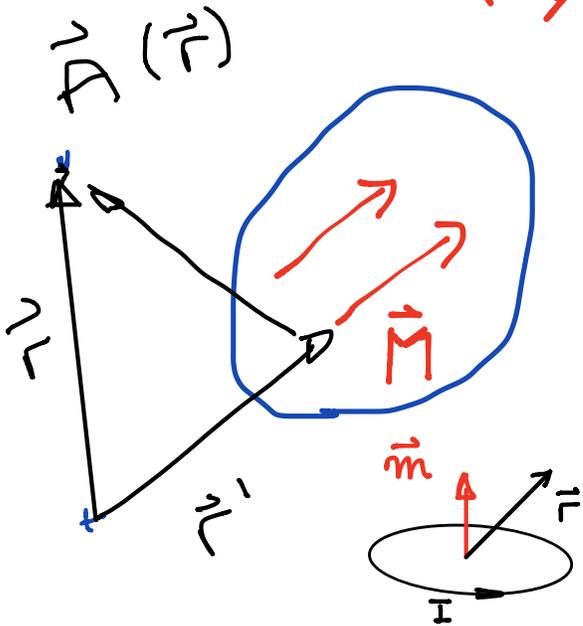
$$\vec{J} = \vec{l} + \vec{s}$$

# VECTOR MAGNETIZACIÓN



mide la densidad de momentos dipolares magnéticos por unidad de volumen:

$$\rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$$



$$\rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \left. \vphantom{\vec{A}(\vec{r})} \right\} \begin{array}{l} \text{Potencial} \\ \text{Magnético} \\ \text{Vector} \end{array}$$

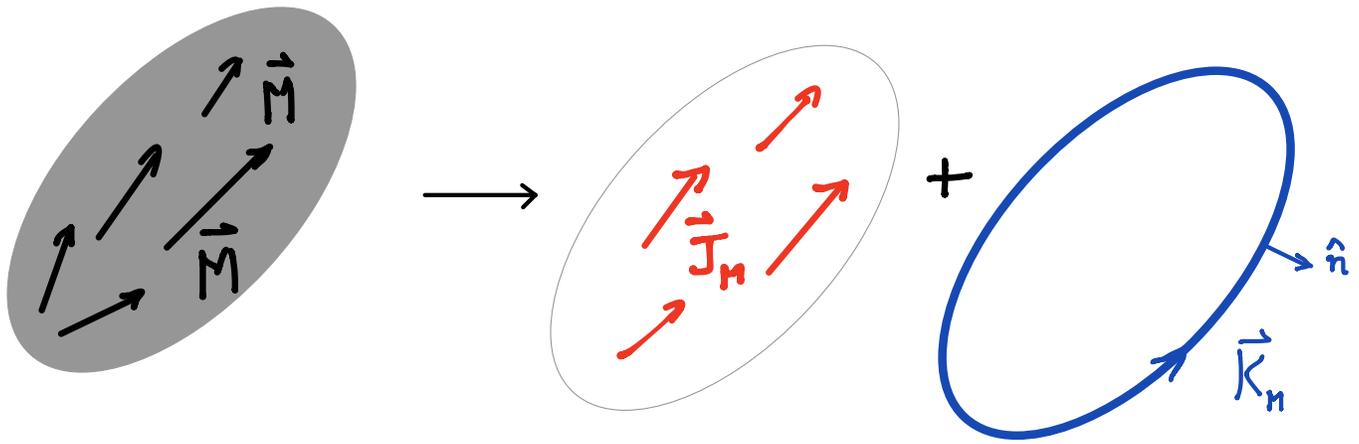
$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\tau'$$

Directamente se puede demostrar:

Cuerpo magnetizado  $\rightarrow$

$$\vec{K}_n = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$\vec{J}_n = \nabla \times \vec{M}(\vec{r})$$



$\vec{K}_n \equiv$  densidad de corriente superficial de mag.

$\vec{J}_M \equiv$  densidad de corriente de mag.

son corrientes ficticias que reemplazan a  $\vec{M}$  para efectos de calcular los campos magnéticos  
(análogo a esquema en dieléctricos)

La derivación de las corrientes de magnetización sigue un esquema ya conocido:

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) dV'$$

Esta expresión se puede expresar como:

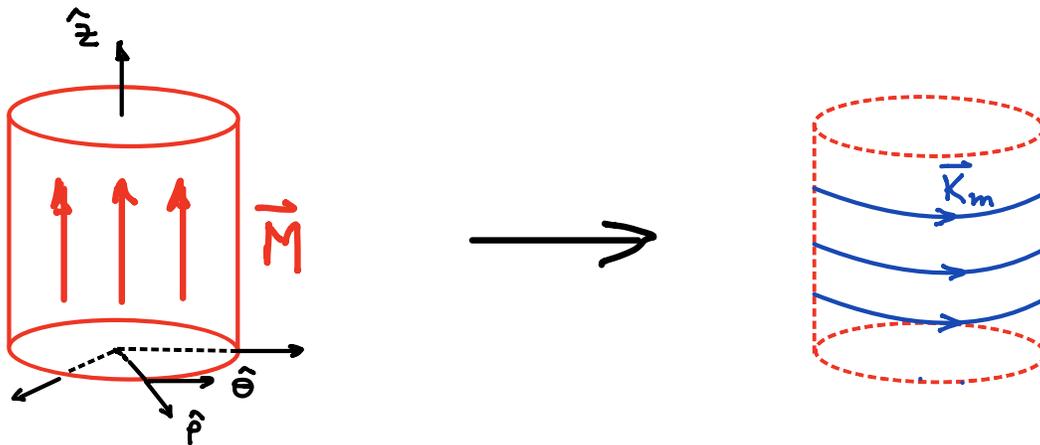
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S(V)} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\nabla' \times \left( \frac{\vec{M}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$ 
 $\vec{J}_M$ 
 $\vec{K}_n = \vec{M} \times \hat{n}$ 
 $d\vec{S}' = dS' \hat{n}$

$\hat{n} \equiv$  normal a superficie del medio

# EJEMPLO: Campo magnético de un imán

Modelo del imán: medio material con magnetización  $\vec{M}$  uniforme



Suponer  $\vec{M} = M \hat{z}$

dada la forma del imán (cilindro), usar coord. cilíndricas

$$\Rightarrow \hat{n} \equiv \hat{\rho}$$

Las corrientes de magnetización son:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0 \quad (\vec{M} = \text{cte})$$

$$\begin{aligned} \vec{K}_m &= \vec{M} \times \hat{n} = \vec{M} \times \hat{\rho} = M \hat{\theta} \quad \text{en manto cilindro} \\ &= 0 \quad \text{en extremos sup. e inferior} \end{aligned}$$

CONCLUSIÓN: el imán indicado produce un campo magnético equivalente al de una bobina (de largo finito) de  $m$  vueltas/largo y por las que circula una corriente  $I$ ,

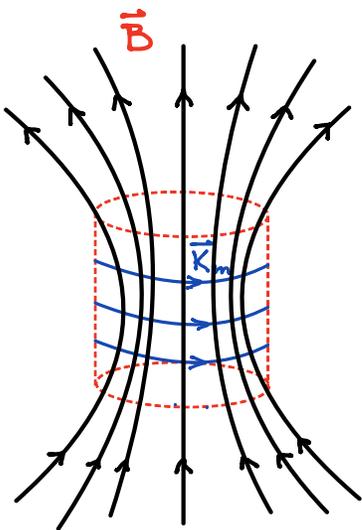
$$m I \equiv K_m = M$$

campo magnético en interior del imán

$$\vec{B}_{\text{int}} \approx \mu_0 M \hat{z}$$

$$\vec{B}_{\text{ext}} \approx 0$$

} por consistencia de resultado  
analizando las condiciones  
de borde.





## MEDIOS MATERIALES

$$\boxed{\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}}$$

$\chi_m \equiv$  susceptibilidad magnética

$$\Rightarrow \underline{\vec{B} = \mu_0 [1 + \chi_m] \vec{H} = \mu \vec{H}}$$

$\mu \equiv$  permeabilidad magnética del material

En general:  $\mu \approx \mu_0$

solro ferromagnéticos  $\rightarrow \mu = \mu(H)$

La relación simple entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  permite generalizar los resultados obtenidos en el vacío a los que se obtienen en presencia de un medio material: basta reemplazo  $\mu_0 \rightarrow \mu$

Ej:

\* Campo magnético producido por densidad de corriente  $\vec{J}$  en presencia de un medio ( $\mu$ )

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV'$$

\* Energía magnética

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\text{espacio}} \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \mu \int_{\text{espacio}} |\vec{H}|^2 dV$$

# COMPORTAMIENTO:

se divide en 3 tipos de materiales:

DIAMAGNÉTICOS  
( $\chi_m < 0$ )

PARAMAGNÉTICOS  
( $\chi_m > 0$ )

FERROMAGNÉTICOS  
( $\chi_m \gg 1$ )

$$|\chi_m| \ll 1$$

$$\mu \approx \mu_0$$

$$\mu \gg \mu_0$$

Paramagnetic Materials	$\chi$	Diamagnetic Materials	$\chi$
Aluminum	$2.2 \times 10^{-5}$	Bismuth	$-1.7 \times 10^{-5}$
Calcium	$1.4 \times 10^{-5}$	Carbon (diamond)	$-2.2 \times 10^{-5}$
Chromium	$3.1 \times 10^{-4}$	Copper	$-9.7 \times 10^{-6}$
Magnesium	$1.2 \times 10^{-5}$	Lead	$-1.8 \times 10^{-5}$
Oxygen gas (1 atm)	$1.8 \times 10^{-6}$	Mercury	$-2.8 \times 10^{-5}$
Oxygen liquid (90 K)	$3.5 \times 10^{-3}$	Hydrogen gas (1 atm)	$-2.2 \times 10^{-9}$
Tungsten	$6.8 \times 10^{-5}$	Nitrogen gas (1 atm)	$-6.7 \times 10^{-9}$

# MATERIA Y CAMPOS MAGNÉTICOS

Característico a la estructura de la materia es la existencia de momentos magnéticos debido a efectos orbitales o al spin intrínseco de los  $e^-$  en el átomo.

$$\vec{m}_i \rightarrow \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

Vector Magnetización

mide densidad de momentos magnéticos en el medio

En estado natural,

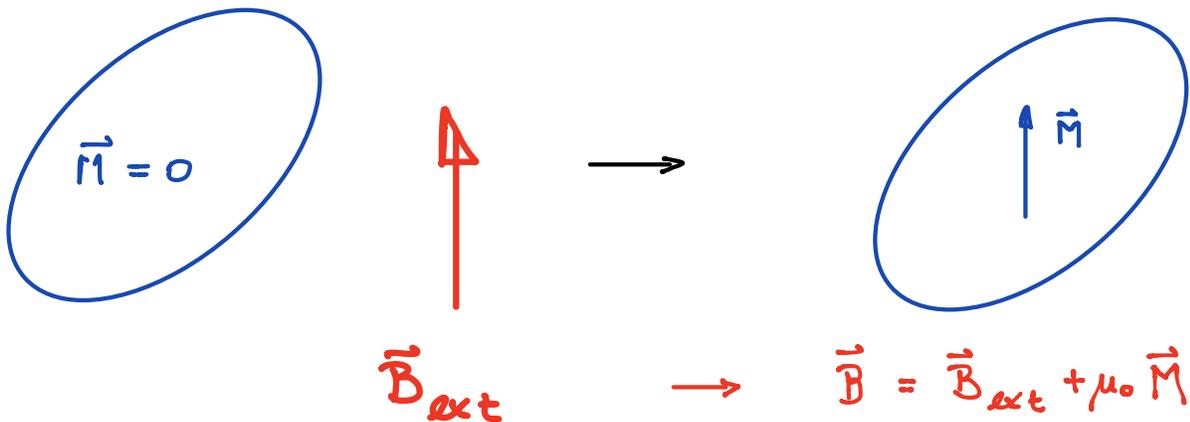
$$\vec{M} = 0$$

salvo materiales

ferromagnéticos que

pueden presentar una magnetización permanente (imanes)

En presencia de un campo magnético externo, los medios se magnetizan  $\Rightarrow \vec{M}$  tiende a alinearse en la dirección del campo



Consecuencia:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \text{intensidad de campo magnético}$$

$\vec{H}$  tiene su fuente en corrientes de conducción

$\vec{B}$  tiene su fuente en corrientes de conducción y magnetización

Modelo para  $\vec{M}$ :

en mayoría de los medios:  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$   
↳ susceptibilidad magnética

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$  : permeabilidad magnética

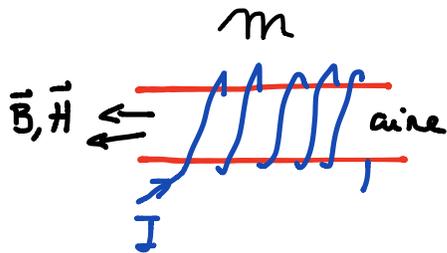
En resumen:

Conociendo  $\vec{J}_c \rightarrow \vec{H}$  a partir de  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$

$$\vec{H} \Rightarrow \underline{\vec{B} = \mu \vec{H}} \quad \left( \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \right)$$

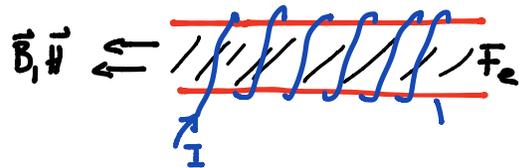
( $\mu \cong \mu_0$  mayoría de los medios)  
( $\neq \mu_0$  ferromagnéticos)

# IMPORTANCIA: MATERIALES FERROMAGNETICOS



$$\vec{B} = \mu_0 m I \hat{n}$$

$$\vec{H} = m I \hat{n}$$



$$\vec{B} = \mu m I \hat{n}$$

$$\vec{H} = m I \hat{n}$$

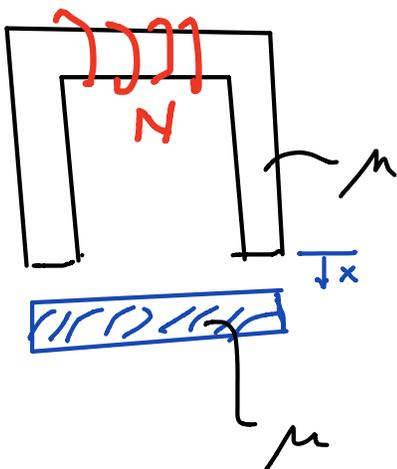
$$\frac{B_{Fe}}{B_{aire}} = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \sim 10^3 \div 10^4$$

$$\frac{\phi_{Fe}}{\phi_{aire}} = \frac{\mu}{\mu_0} \Rightarrow$$

$$\underline{\phi_{Fe} \gg \phi_{aire}}$$

Para misma corriente I por bobina

Ejemplo: electroimán



Calcular la fuerza con que pieza de metal es atraída cuando circula I por bobina.  
Núcleo es de Fe ( $\mu$  alto!)

$$W_{mag} = ?$$

$$\vec{F} = \nabla W_{mag}$$

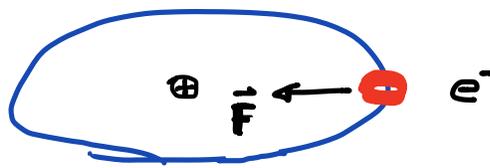
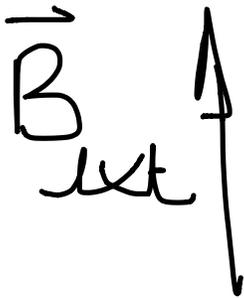
# DIAMAGNETISMO

$e^-$  en órbita alrededor del núcleo

$\vec{B}_{ext}$   $\rightarrow$  genera una fem en la órbita, con  $e^-$  cambiando su rotación para contrarrestar el cambio temporal del flujo mag. en la zona

$\Rightarrow$  genera un campo magnético que debilita  $\vec{B}_{ext}$

$$\Rightarrow \chi_m < \cancel{0} \text{ (pequeño)} \quad |\chi_m| \ll 1$$



$$m \vec{a} = \vec{F}_c \text{ (equilibrio)}$$

$$\downarrow$$
$$m \vec{a}' = \vec{F}_c + \vec{F}_L$$

$\hookrightarrow q \vec{v} \times \vec{B}$

$\downarrow$   
aumenta frecuencia angular de rotación

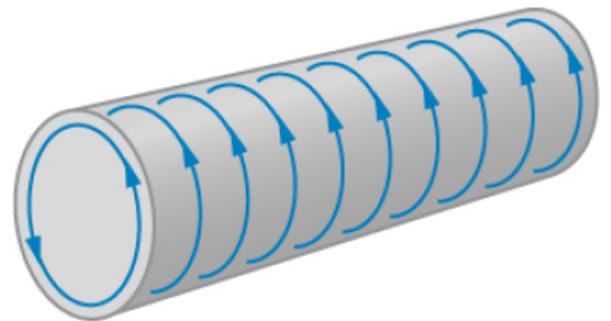
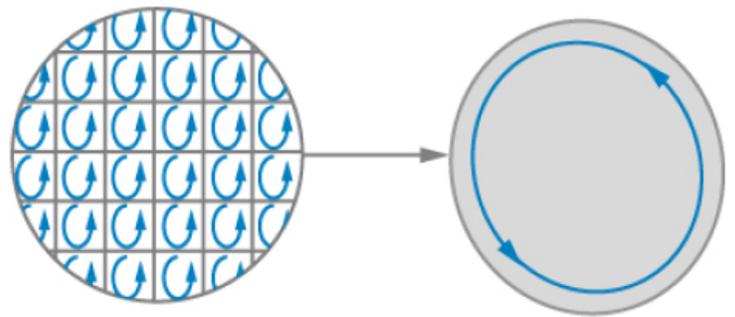
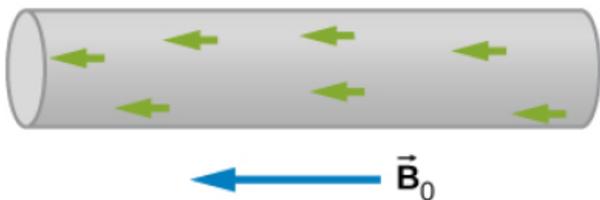
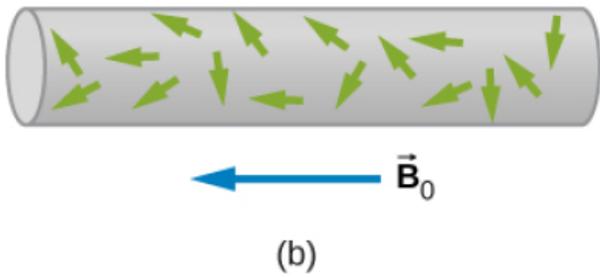
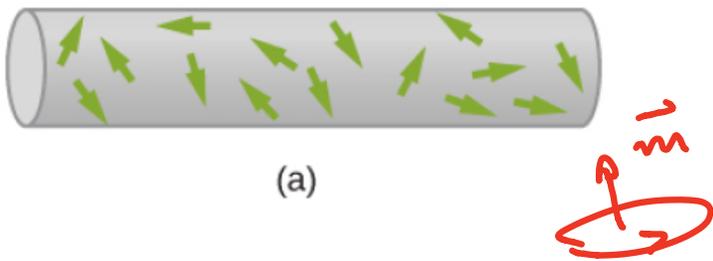
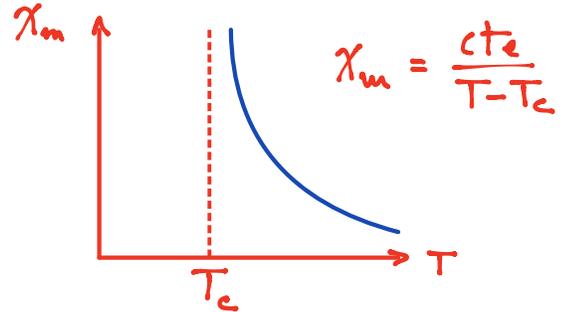
Siempre presente en todos los materiales

# PARAMAGNETISMO

Ej: Na, O<sub>2</sub> líquido, etc

Asociado al comportamiento de los  $\vec{m}$  en material. Depende de la temperatura: Ley de Curie

Sustancias con  $\vec{M} \neq 0$  en ausencia de campo externo.  
 $\vec{M}$  se reorienta con  $\vec{B}_{ext}$ .



Se refuerza campo externo  $\Rightarrow \chi_m > 0$

$$|\chi_m| \ll 1$$

# FERROMAGNETISMO

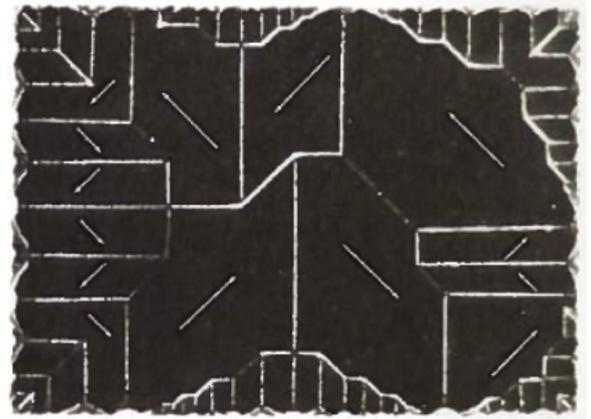
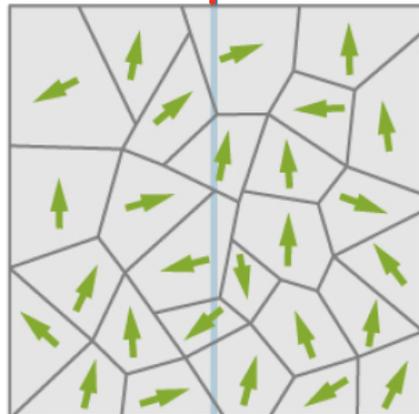
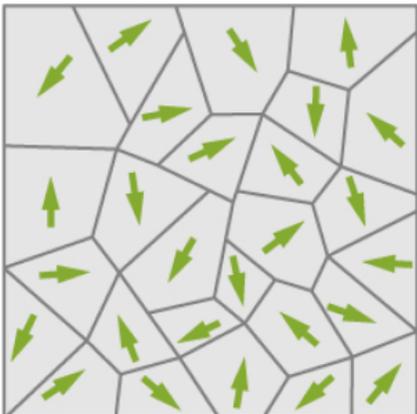
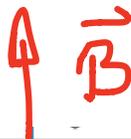
Fe, Co, Ni + aleaciones

$$\chi_m \gg 0 (\sim 10^3)$$

Material hecho de pequeñas regiones  $\sim 10^{-12} - 10^{-8} \text{ m}^3$   
los dominios magnéticos (Weiss)

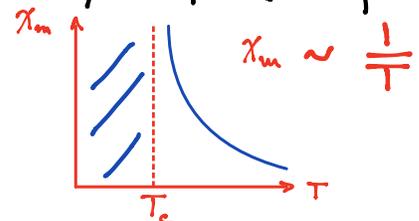
En ellos, los dipolos magnéticos rígidamente  
alineados en la misma dirección por acoplamiento  
entre átomos  $\Rightarrow$  cada dominio tiene un momento  
magnético neto (resultante)

\*  $\mu = \mu(H)$



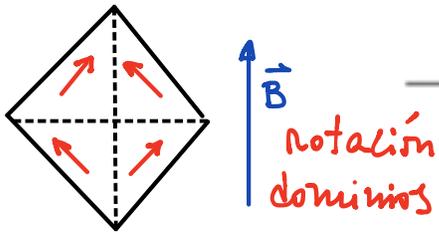
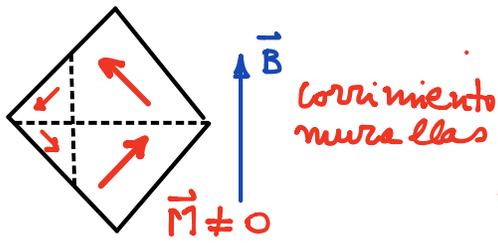
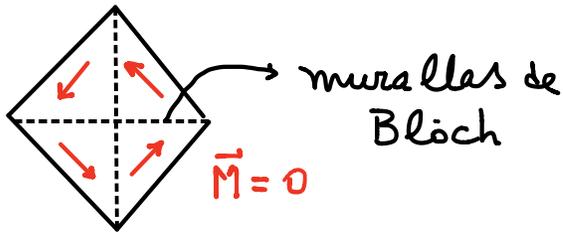
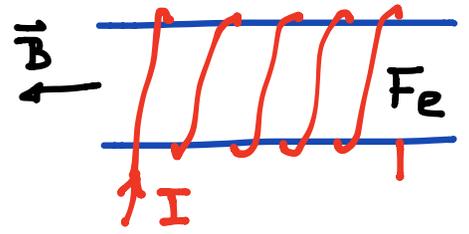
Dependencia con temperatura. Existe temperatura crítica  
más allá de la cual se pierden propiedades  $\gamma \rightarrow$  paramagnético

$T_c \approx 10^3 \text{ } ^\circ\text{K}$

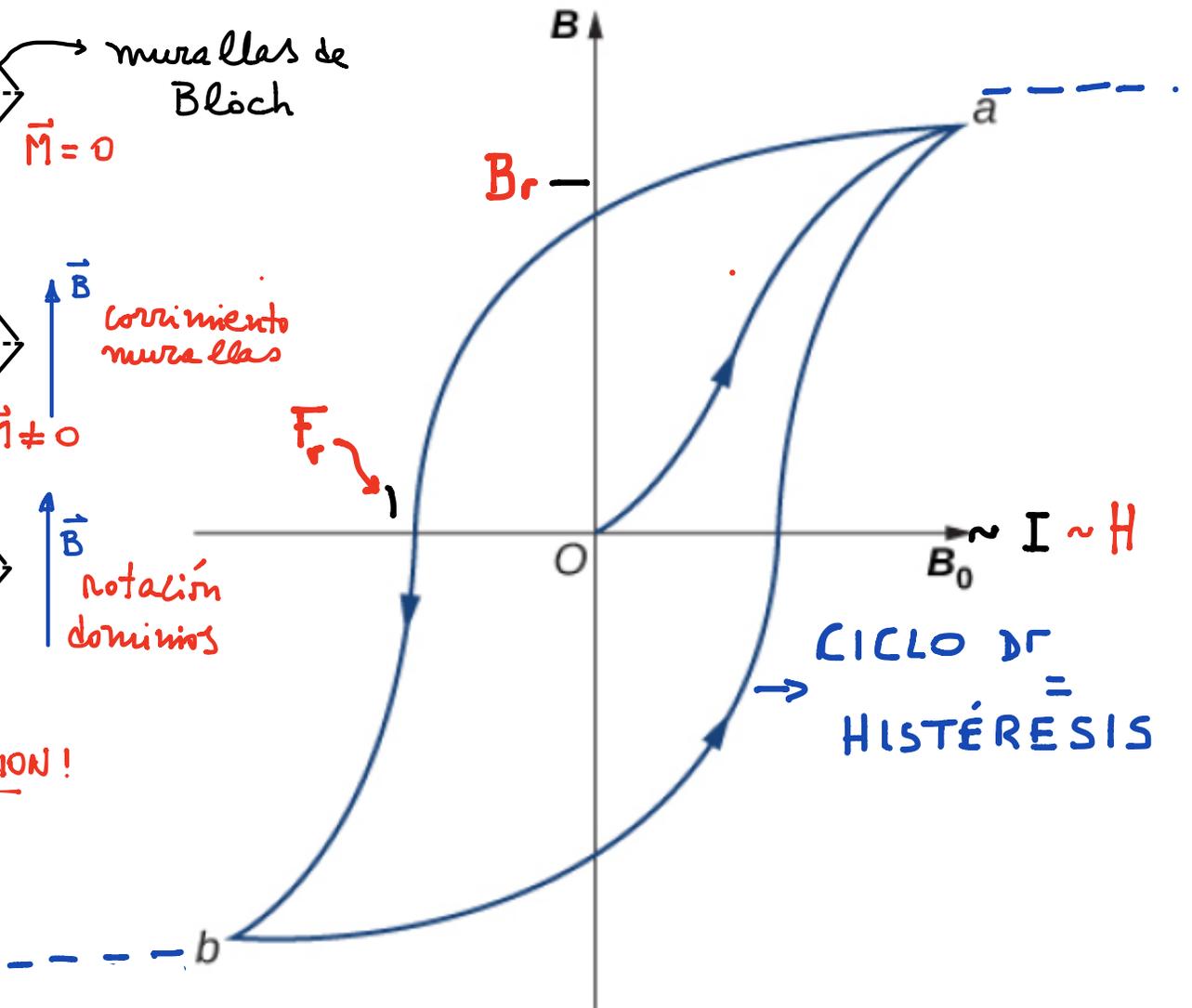


# CURVA DE MAGNETIZACION

Curva de magnetización  
y ciclo histéresis se explica  
en base a teoría de dominios  
magnéticos



SATURACION!

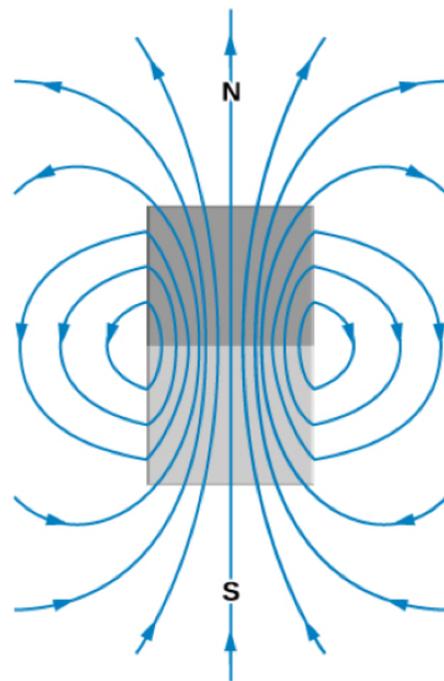
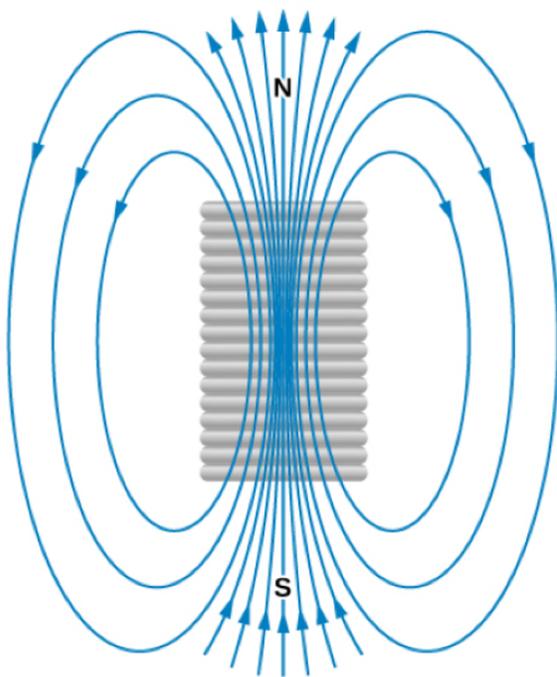


$B_r \equiv$  campo magnético residual

$F_r \equiv$  fuerza coercitiva

EJEMPLO :

Campos magnéticos para una bobina y un imán



# CLASIFICACION DE MATERIALES FERROMAGNÉTICOS

## \* ) Sust. mag. blandas

- $\mu$  altos ; fáciles de magnetizar y desmag.
- uso :
  - máquinas eléctricas
  - transformadores

## \*\* ) Sust. mag. duras

- $\mu$  ~ bajo (relativamente)
- alta fuerza coercitiva  
(difíciles de mag. y desmag.)
- uso :
  - imanes

ECUACIONES DE MAXWELL

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

# MAXWELL Y EL FENOMENO E+M

El estudio del fenómeno e+m puede resumirse en un conjunto de ecs. que lo describe:

Para fenómenos independientes del t ( $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ )

Ecuaciones constitutivas  
del medio

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_r \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right\} \text{ELÉCTRICO}$$

$$\begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \hookrightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c \end{array} \right\} \text{MAGNÉTICO}$$

$$\begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \\ \hookrightarrow \vec{B} = \mu \vec{H} \end{array}$$

(+)

$J_c \equiv$  densidad corriente de conducción

$\vec{D} \equiv$  vector Desplazamiento

$\sim \rho_r$

$\vec{H} \equiv$  Intensidad del campo magnético

$\sim I$

magnitudes independientes del medio material

\* densidad energía eléctrica

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

\* densidad energía magnética

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Fenómenos e+m dependientes del t ( $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ )

\* inducción electromagnética

$\Rightarrow$  modificar  $\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Y los fenómenos eléctricos y magnéticos se acoplan !!

SIN EMBARGO :

La falta de simetría de las ecuaciones sugiere una descripción incompleta ?

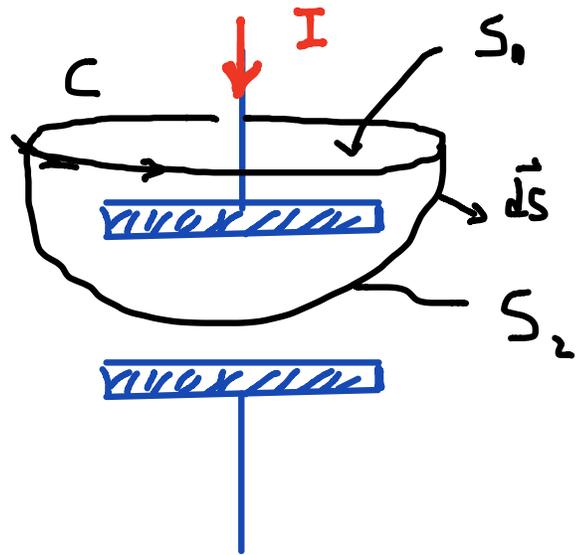
$$\begin{array}{ccc} \nabla \times \vec{E} = 0 & \xrightarrow{?} & \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c & & \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + (?) \end{array}$$

RECORDAR

En derivación de  $\nabla \times \vec{H}$  se dejó fuera un término dependiente del t y consecuencia de ec. continuidad de  $\vec{J}$

# UN EJERCICIO

Un condensador  
placas planas y ||s



Superficie  $S = S_1 + S_2$   
encierra una placa

Considerar  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c$   
e integrar en  $S_1$  y  $S_2$ . Ambas superficies  
enlazadas por la misma curva  $C$

$$\int_{S_1} \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{dS} = \oint_{C(S_1)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{S_1} \vec{J}_c \cdot \vec{dS} = \underline{-I}$$

$$\int_{S_2} \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{dS} = \oint_{C(S_2)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{S_2} \vec{J}_c \cdot \vec{dS} = \underline{0} \quad \text{PLOP!}$$

¿CUAL RESULTADO ES CORRECTO?

$\int_{S_1} \rightarrow$  no importa la superficie  $S_1$  y resultado es OK

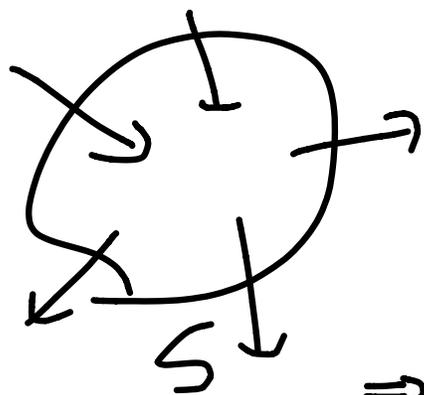
$\int_{S_2} \rightarrow$  depende del dispositivo ( $C$  en este caso)

PREGUNTA: A LO MEJOR, la densidad de corriente que genera  $\vec{H}$  no es  $\vec{J}_c$  sino algo más complejo?

HIPOTESIS:  $\vec{J}_c \rightarrow \vec{J} = \vec{J}_c + \vec{\Delta}$

donde  $\vec{\Delta}$  es una densidad de corriente de "otro" origen y que cuando no hay variaciones temporales  $\vec{\Delta} \rightarrow 0$

Tomar  $\nabla \cdot \vec{J} = \underbrace{\nabla \cdot \vec{J}_c}_{-\frac{\partial \rho_c}{\partial t}} + \nabla \cdot \vec{\Delta}$



$\rho_c = \nabla \cdot \vec{D}$

$-\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot \left[ -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\Delta} \right]$

Entonces, exigiendo que la corriente neta (producida por todas las fuentes  $\rightarrow$  fenómeno de conducción y otros) a través de superficie  $S = S_1 + S_2$

$\Rightarrow \oint_{S=S_1+S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

$\Rightarrow \vec{\Delta} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

## CONCLUSIÓN:

Para tener una descripción consistente del campo electromagnético, hay que identificar correctamente la corriente total que da origen a  $\vec{H}$ ,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

ecuación que permite recuperar la simetría entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  ( $\vec{H}$ )

en vacío:  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$c \equiv$  velocidad de la luz:  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$

en medio material:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\left. \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M}) \end{aligned} \right\} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \underbrace{\vec{J}_c + \frac{1}{\mu_0} \vec{M}}_{\vec{J}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{J} = \underbrace{\vec{J}_c}_{\text{conducción}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}_{\text{polarización}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{M}}_{\text{magnetización}}$$

## GRAN RESUMEN:

MAXWELL  $\rightarrow$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_L$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r}; t) ; \vec{D} \equiv \vec{D}(\vec{r}; t) ; \text{etc}$$

### FUENTES:

$\rho_L \equiv$  densidad de carga libre

$\vec{J}_L \equiv$  densidad de corriente de conducción ( $\sim \sigma \vec{E}$ )

### MEDIO:

\* vacío :  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$        $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

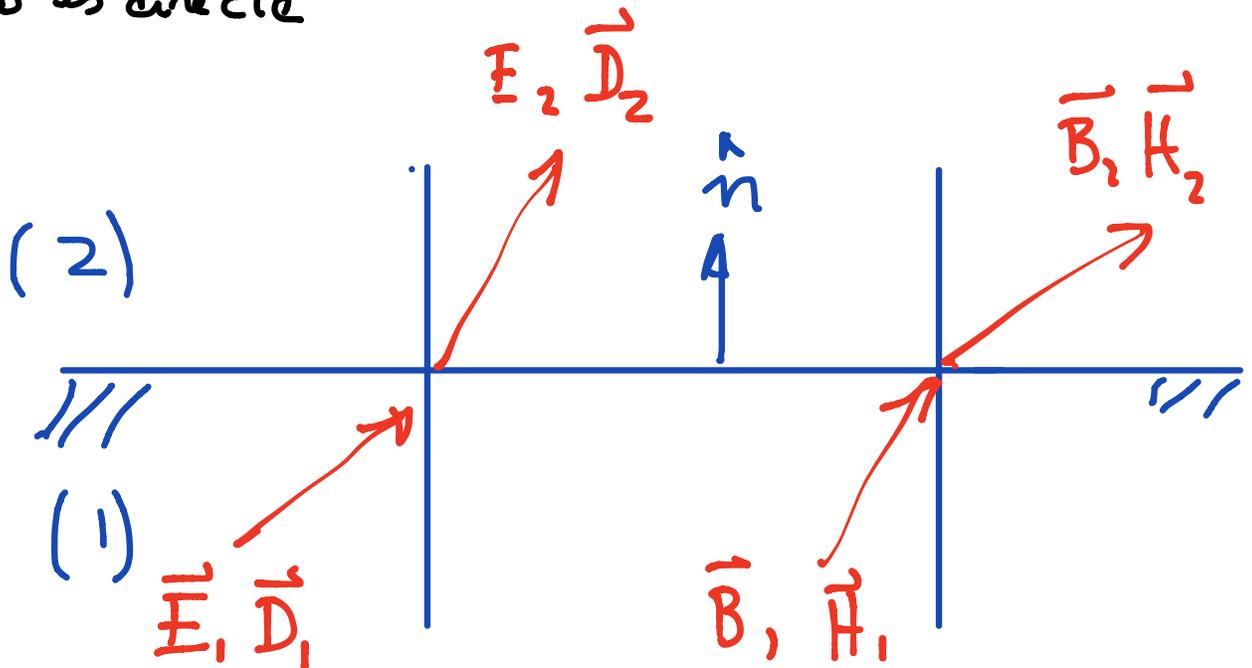
\* material:

- general       $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$        $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} - \vec{M}]$

- lineal, homogéneo       $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$   
    $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$

## CONDICIONES DE BORDE

Complementa a las ecuaciones de Maxwell el comportamiento de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  al cambiar de medio. Vimos el caso eléctrico - su generalización a  $\vec{B}$  es directa



$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

se conservan componentes normales

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0$$

se conservan componente tangencial

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

se conservan componentes normales

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = 0$$

se conservan componente tangencial

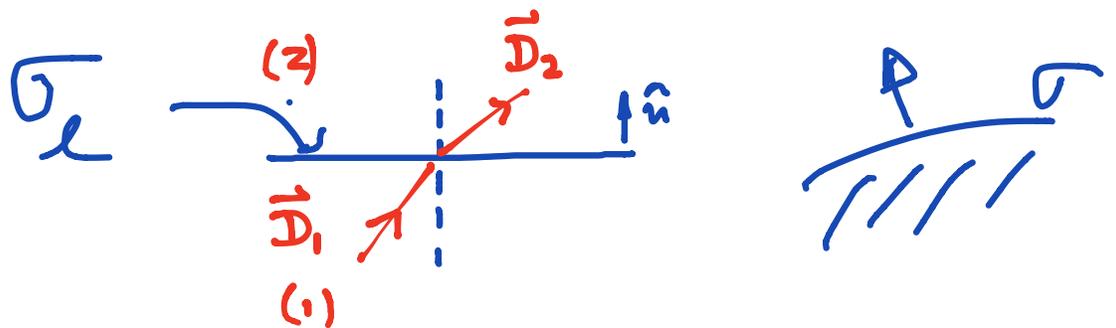
Las condiciones de borde indicadas corresponden al caso en que no existe una fuente en la superficie de separación, es decir,

$\sigma_e \equiv$  densidad de carga libre

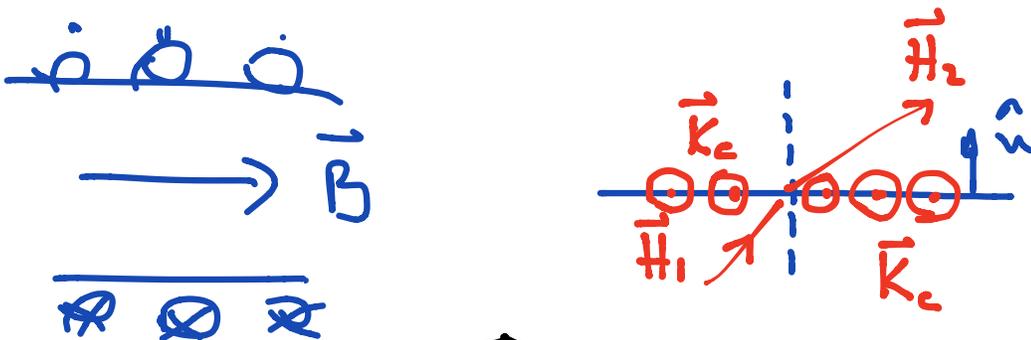
$\vec{K}_c \equiv$  densidad de corriente superficial

En caso de existir, 2 de las 4 condiciones de borde cambian

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_e \quad \checkmark$$



$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \hat{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{K}_c$$



# ¿QUÉ HAY NUEVO EN MAXWELL?

## \* CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

Considerar:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{E}$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{H}$$

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = \vec{J}_c \cdot \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

$$(\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{H} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H}$$

+ identidad  $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}$

INTRODUCIR:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  VECTOR DE POYNTING

Y RECONOCER:

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (\text{dens. energía eléctrica})$$

$$W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (\text{dens. energía magnética})$$

$$W_{em} = W_e + W_m$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t} = - \vec{J}_c \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

EC. CONSERVACIÓN ENERGÍA E+M

$$[S] = [E][H] = \left(\frac{F}{Q}\right)\left(\frac{I}{L}\right) = \frac{F}{T L} = \frac{F\left(\frac{L}{T}\right)}{L^2}$$

$$= \frac{\text{Potencia}}{\text{Area}} = \left[\frac{\text{Watt}}{m^2}\right] = \frac{J}{s \cdot m^2}$$

Vector de Poynting mide la energía que por unidad de tiempo y por unidad de área transportan los campos electromagnéticos

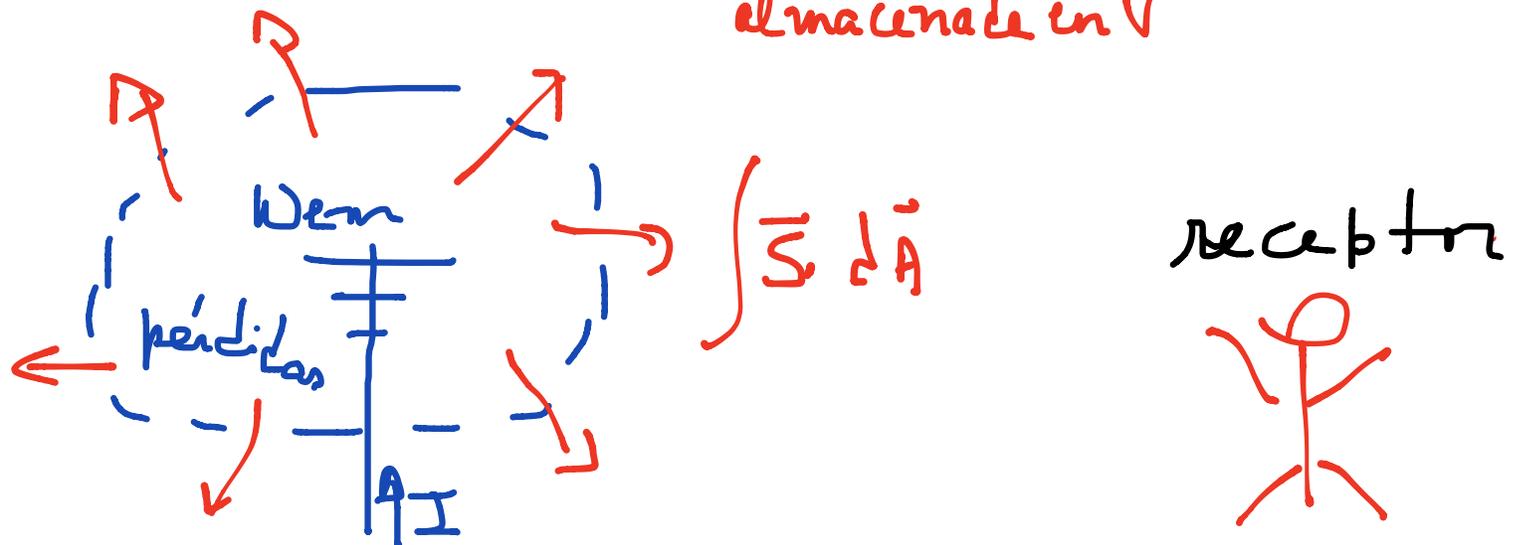
### FORMA INTEGRAL:

$$\oint_{S(V)} \vec{S} \cdot d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} W_{em} = - \int_V \vec{J}_c \cdot \vec{E} d\tau$$

Flujo energía e-m  
a través superficie S  
por unidad de tiempo

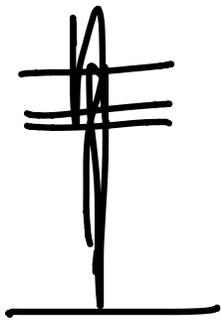
Variación  
temporal de  
energía e-m  
almacenada en V

Potencia  
disipada en V  
(Joule)

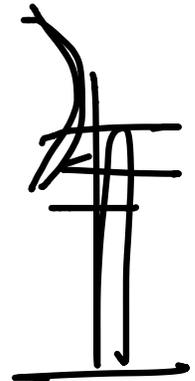


# FENOMENO DE PROPAGACION

PROBLEMA: estudiar comportamiento de  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en un medio  $(\epsilon, \mu)$  sin fuentes presentes ( $\rho_e = \vec{J}_e = 0$ )



¿  $\vec{E}, \vec{B}$  ?



Fuente

Receptor

En el medio,

no hay  
fuentes:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \leftarrow$$

Util:

identidad  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}$

⇒

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0$$

Ecuación  
de onda  
clásica

Los campos eléctricos y magnéticos satisfacen una ecuación de onda clásica. Significan que se propagan en el medio con una velocidad

$$v = \frac{c}{n}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

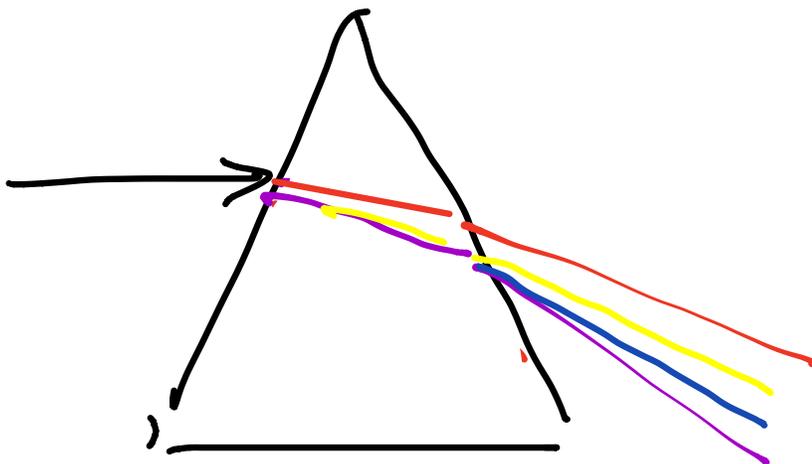
velocidad de luz  
en el vacío

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \approx \sqrt{\epsilon} \quad \text{índice de refracción del medio}$$

En general,  $\epsilon = \epsilon(\omega) \Rightarrow n = n(\omega)$

el medio es dispersivo

Existe una velocidad diferente para ondas de diferente frecuencia



# SOLUCION A ECUACION DE ONDA

En 1-dim

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$$

$$F = \bar{F}(x; t)$$

Solución tipo onda viajera:  $F = F(x \mp vt)$

Verificar que  $F$  es solución de la ecuación de onda

$F(x - vt) \rightarrow$  función  $F$  se propaga hacia  $(+x)$

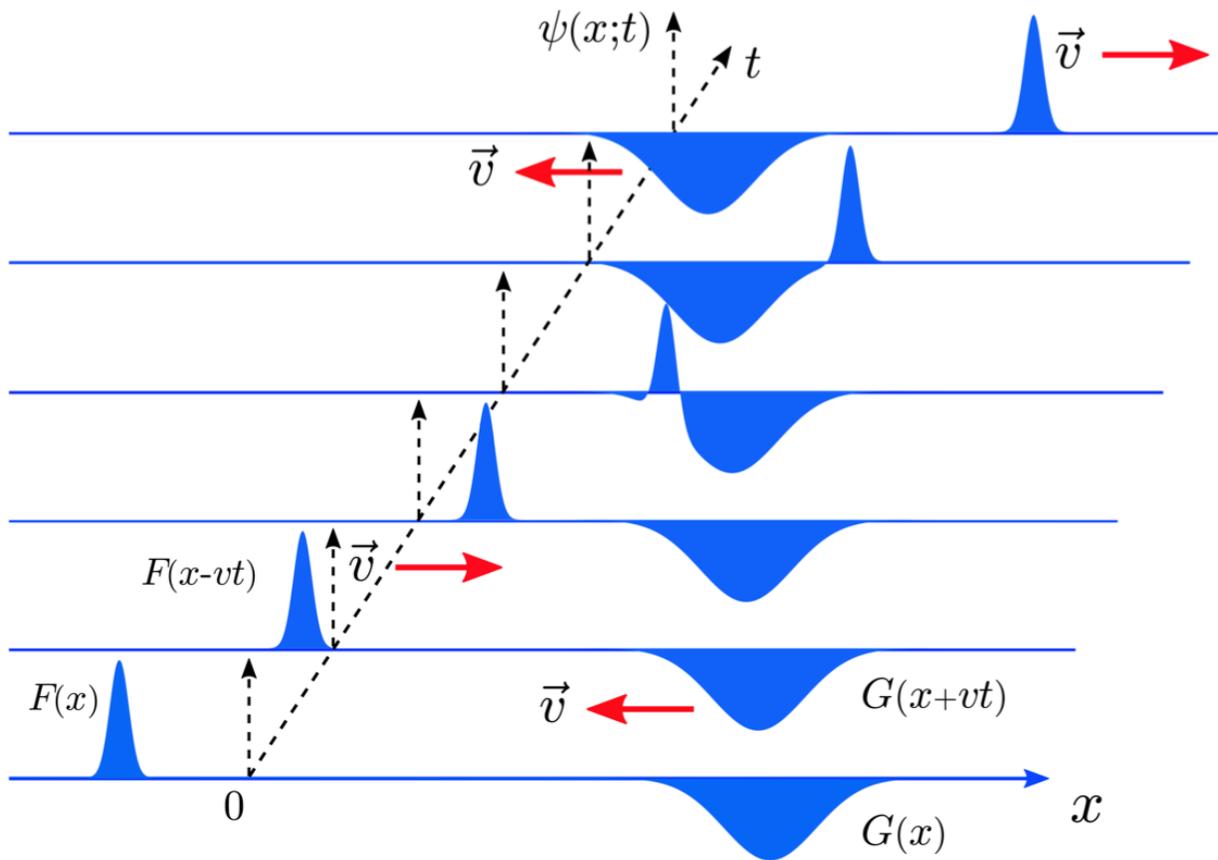
$F(x + vt) \rightarrow$  "  $F$  se propaga hacia  $(-x)$

Solución más general:

$$F_G(x; t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

$F$  y  $G$  : funciones arbitrarias

# Soluciones en 1-dim



tenemos

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0$$

# ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS

Onda plana: los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  dependen de 1 coord. espacial (distancia al origen o foco) y están contenidos en un plano - Plano de Propagación

Monocromática:  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  varían armónicamente en el tiempo con una frecuencia angular  $\omega$

$$\vec{c} = \sqrt{-1} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}; t) \\ \vec{B}(\vec{r}; t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{array} \right\} e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]}$$

$\cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]$

Fisicamente:  $\vec{e}(\vec{r}; t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}; t) \}$

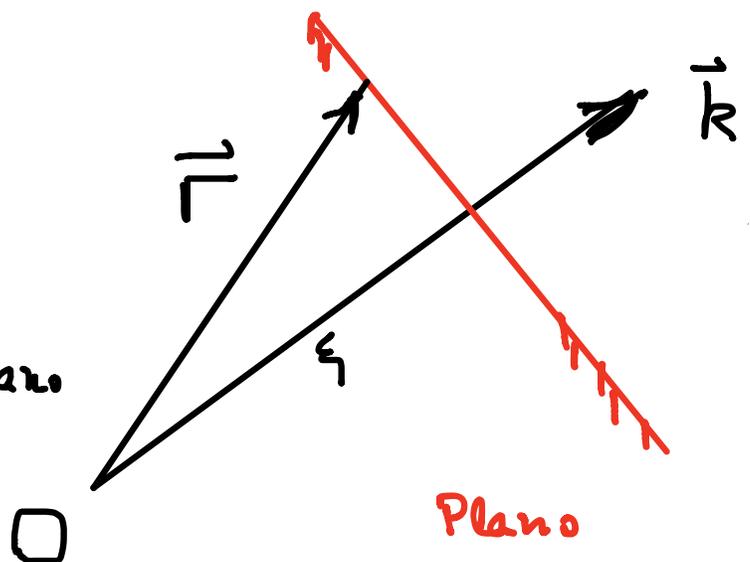
$$\vec{b}(\vec{r}; t) = \text{Re} \{ \vec{B}(\vec{r}; t) \}$$

$\vec{k} \equiv$  vector número de onda

$\vec{r} \equiv$  radio vector

$$\vec{r} \cdot \vec{k} = \xi$$

= distancia origen-plano



Plano

Propagación

Plano propagación contiene a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$

$\vec{E}$  y  $\vec{B}$  corresponden a ondas tipo viajeras si satisfacen la ec. de onda:

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0$$

medio  
no disipativo  
(no hay fuentes)

lo que significa que debe cumplirse

Si  $k = |\vec{k}| \rightarrow$   $k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0$  Relación de dispersión

SIGNIFICA: para una frecuencia angular  $\omega$ , la velocidad  $v$  de propagación de la onda es

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu$$

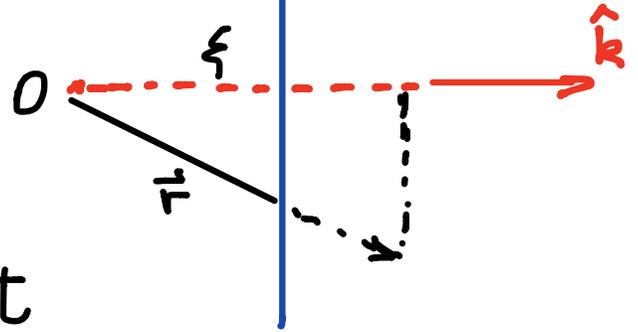
con  $\lambda \equiv$  longitud de la onda  $\rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\nu \equiv$  frecuencia de la onda  $\rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi}$

Plano de la onda:

se ubica a la distancia

$$\xi = \vec{r} \cdot \hat{k}$$



y la fase  $\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t \equiv k \xi \mp \omega t$   
 $= k [\xi \mp v t]$

se mantiene constante para onda viajera

Luego :  $k \xi \mp \omega t = cte$

$$\Rightarrow \dot{\xi} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (\text{Velocidad de Fase})$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{array} \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \equiv k \xi - \omega t = k \left[ \xi - \frac{\omega}{k} t \right] = k \left[ \xi - v t \right]$$

plano avanza  
en dirección  $\hat{k}$

## OBSERVAR:

$\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son soluciones a ec. de onda — pero nada tienen que ver con electromagnetismo

deben tbl su soluciones a ecs. Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0 \cdot \hat{k} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_0 \cdot \hat{k} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} \quad \left( \vec{B}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}_0 \right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_0 = \frac{v}{k} \vec{B}_0 \times \hat{k} \quad \left( \vec{E}_0 = v \vec{B}_0 \times \hat{k} \right)$$

## CONCLUSIÓN

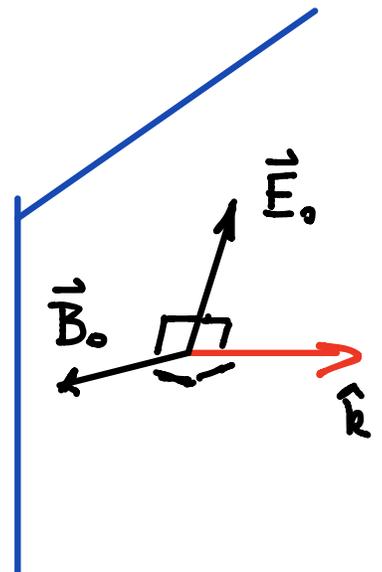
$$\vec{E}_0 \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{B}_0 \cdot \hat{k} = 0$$

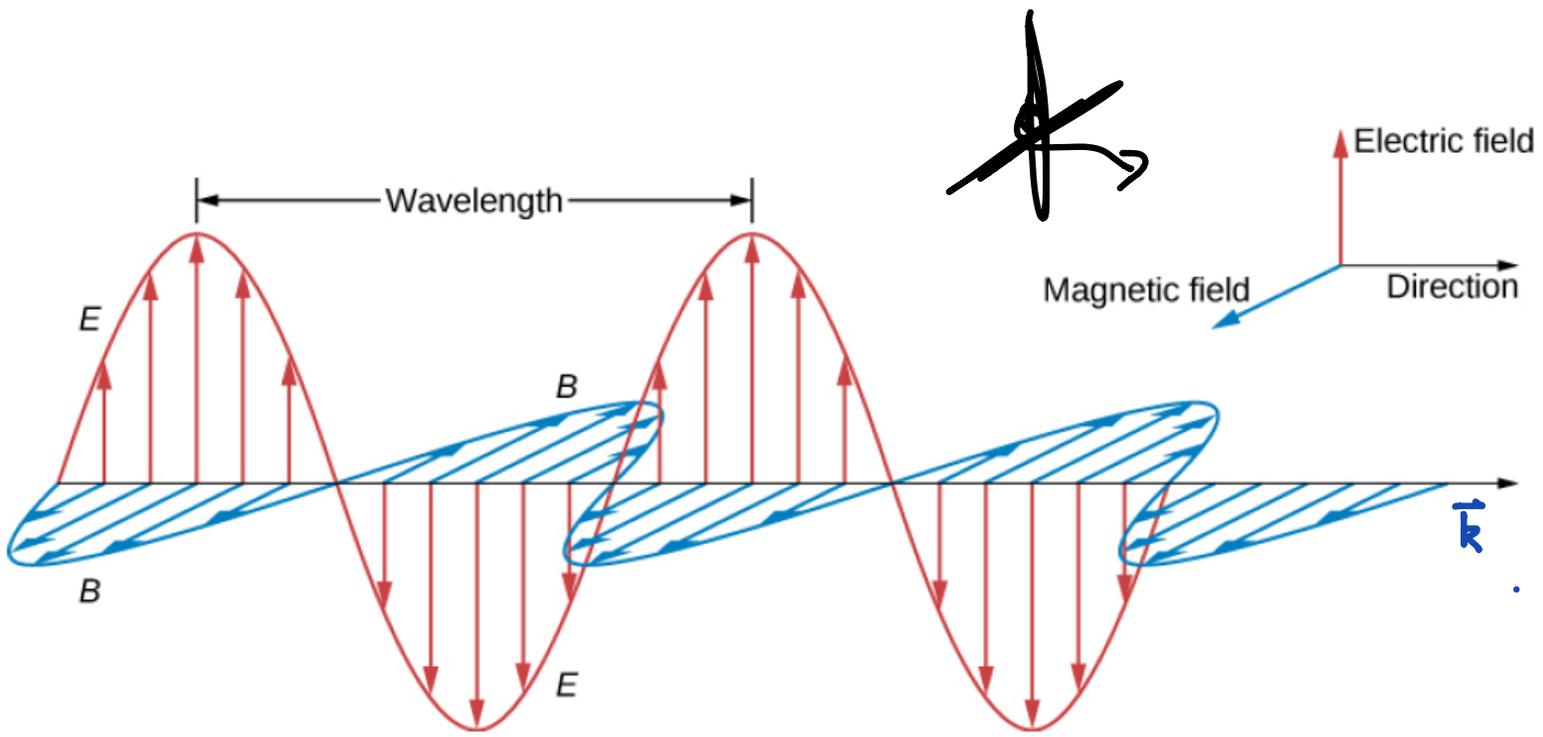
$$\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$$

$$\vec{E}_0 = \frac{\omega}{k} \vec{B}_0 \times \hat{k}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}_0$$



Campos  $\perp$  entre sí y a dirección de propagación



## MEDIOS DISIPATIVOS

La presencia de efectos conductivos en el medio tiene un impacto en el fenómeno de propagación:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

con  $\vec{J}_c = \sigma_c \vec{E}$   $\sigma_c$ : conductividad

Entonces:  $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \vec{E})}_0 - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B}$   
no hay cargas libres

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \mu \left( \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \sigma_c \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = 0$$

---

Para ondas planas monocromáticas,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} + i \mu \sigma_c \omega}$$

Relación de dispersión

número de onda  $k \equiv n$ : complejo

$$\underline{k = \alpha + i\beta}$$

Casos límites:

$$a) J_c \gg J_{\text{desplaz}} \Rightarrow \sigma_c \gg \epsilon \omega$$

$$k^2 \approx i \mu \sigma_c \omega \Rightarrow \boxed{k = \frac{1+i}{\delta}}$$
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma_c}} \equiv \text{longitud de penetración}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \\ \vec{E} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_0 \\ \vec{E}_0 \end{array} \right\} e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$$

Amplitud se atenúa

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k \underbrace{\hat{k} \cdot \vec{r}}_z$$

$$b) J_c \ll J_{\text{desplaz}} \Rightarrow \sigma_c \ll \epsilon \omega \quad (\text{altas frecuencias})$$

$$\rightarrow k \approx \frac{\omega}{v} \quad \text{onda no sufre atenuación}$$

## ENERGIA ONDA E+M PLANA

Vector de Poynting mide la energía transportada por la onda por unidad de tiempo y de área,

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \xrightarrow{\text{relativante}} \vec{S} = \text{Re}[\vec{E}] \times \text{Re}[\vec{H}]$$

Para campos armónicos en el tiempo, interesa la potencia media transmitida por unidad de área más que valor instantáneo

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

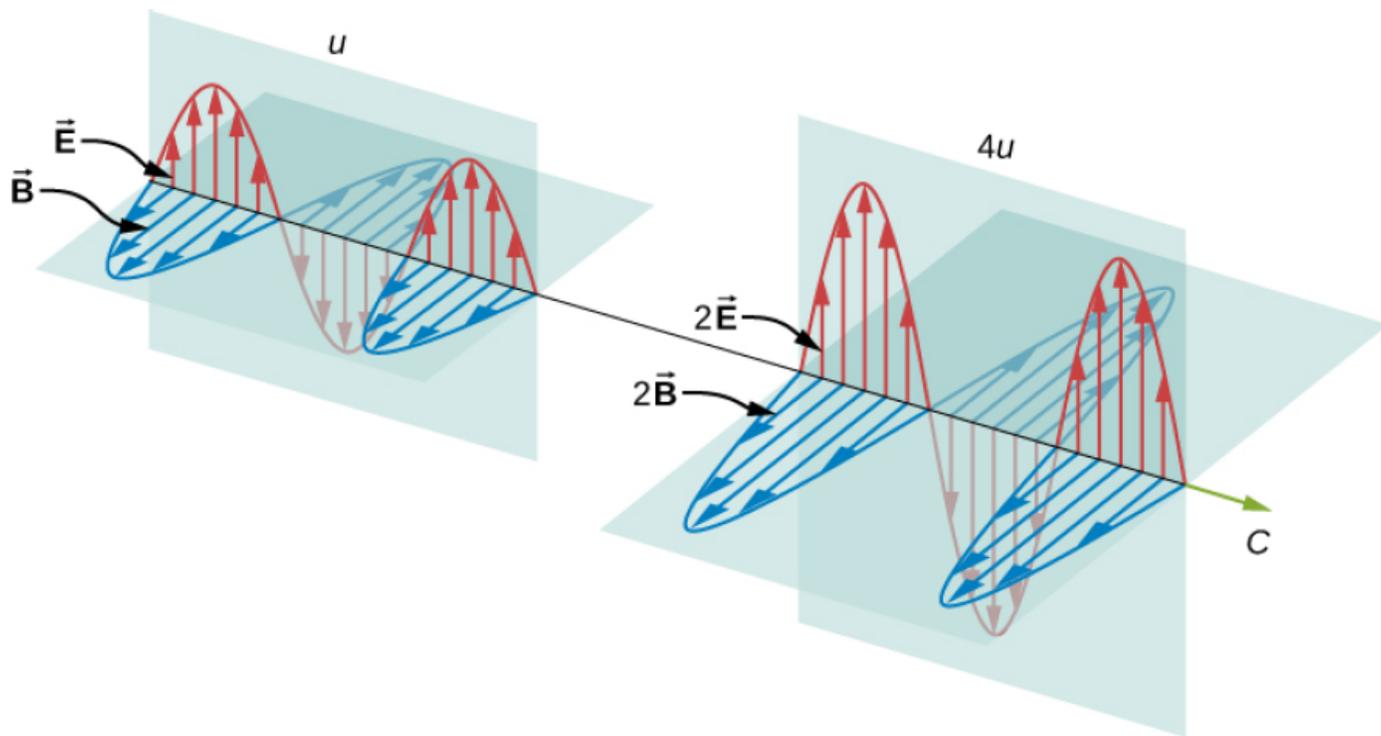
$$\text{demostrar: } \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

explícitamente, al reemplazar  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$

$$\gamma \quad \vec{B} = \frac{k}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}$$

conduce a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\|\vec{E}_0\|^2}{\mu \omega} \text{Re}[k^*] \hat{k}$$



**Figure 16.10** Energy carried by a wave depends on its amplitude. With electromagnetic waves, doubling the  $E$  fields and  $B$  fields quadruples the energy density  $u$  and the energy flux  $uc$ .

# INTENSIDAD DE LA ONDA

$$I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k}$$

$$\Rightarrow I = \frac{|\vec{E}_0|^2}{2\mu\omega} \operatorname{Re}(k^*) \quad \left[ \frac{\text{Joule}}{\text{t} \cdot \text{m}^2} \right]$$

Luego:  $\langle \vec{S} \rangle = I \hat{k}$

Caso particular: sin disipación ( $\sigma_c = 0$ )

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{v} \quad \Rightarrow I = \frac{1}{2\mu v} |\vec{E}_0|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}_0|^2$$

Pero observar:

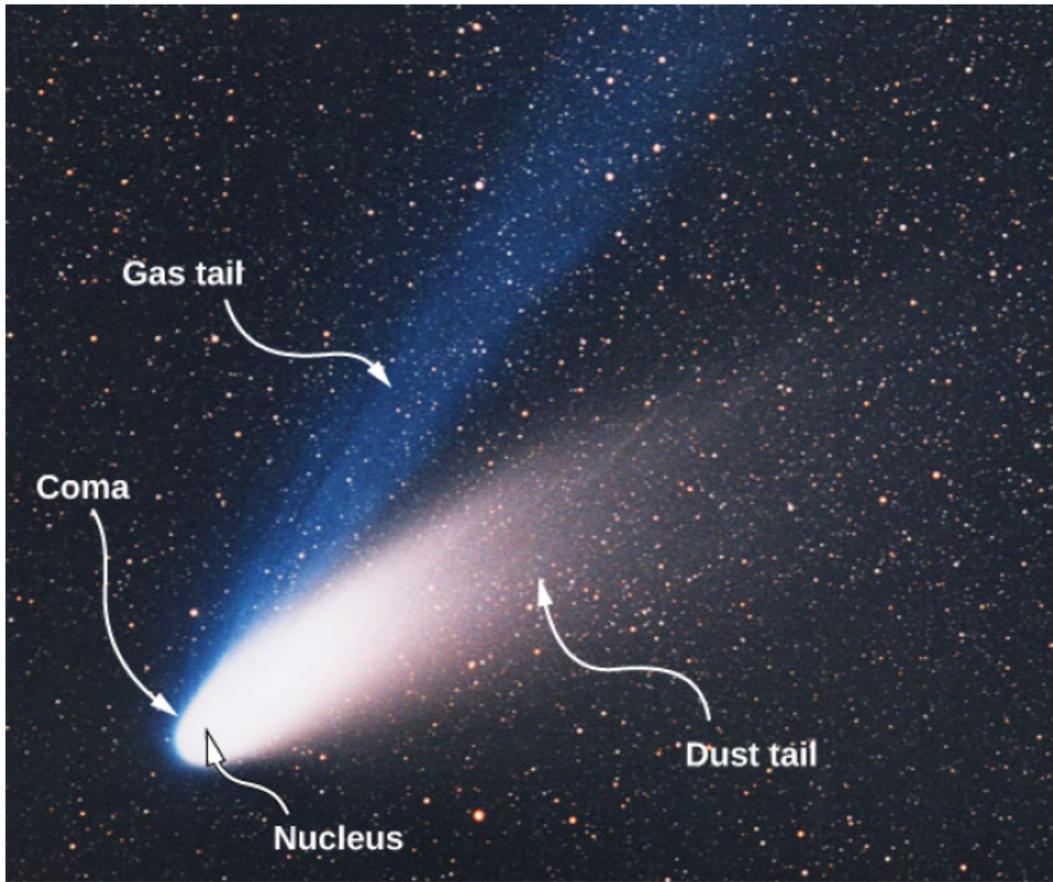
densidad de energía  
en media

$$\langle w_{em} \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Re} [\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{D} \cdot \vec{E}^*]$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}_0|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \langle w_{em} \rangle v}$$

$\hookrightarrow$  densidad  $\sigma$   
 $(N_{\gamma} h\nu)$  energía  $\sigma$



**Figure 16.15** Evaporation of material being warmed by the Sun forms two tails, as shown in this photo of Comet Ison. (credit: modification of work by E. Slawik—ESO)

# POLARIZACION

Las soluciones tipo ondas planas para los campos e+m son:

en ausencia de fuentes: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{array} \right\} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

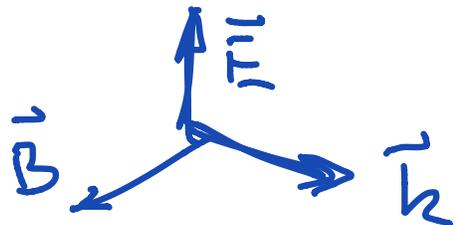
campo físico: 
$$\vec{E}(\vec{r}; t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}; t)]$$

En general, la amplitud del campo es una cantidad compleja,

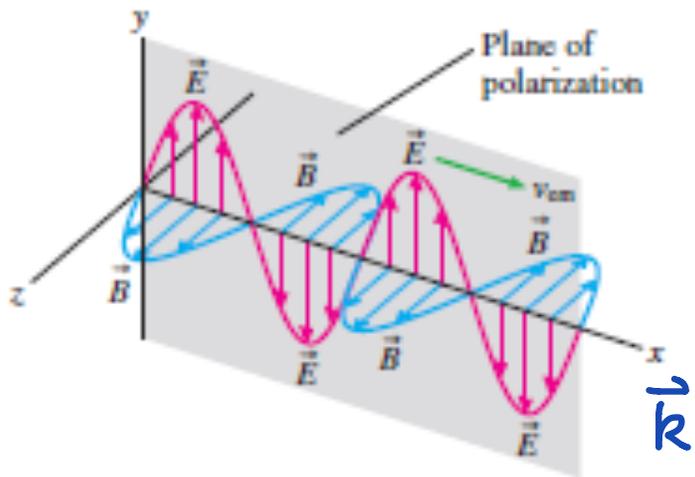
$$\vec{E}_0 = E_0 e^{i\phi} \hat{e}, \quad \hat{e} \cdot \hat{k} = 0$$

con  $E_0 =$  magnitud real  $\gamma$   $\phi_0 =$  fase  
 $\hat{e} \equiv$  dirección del campo

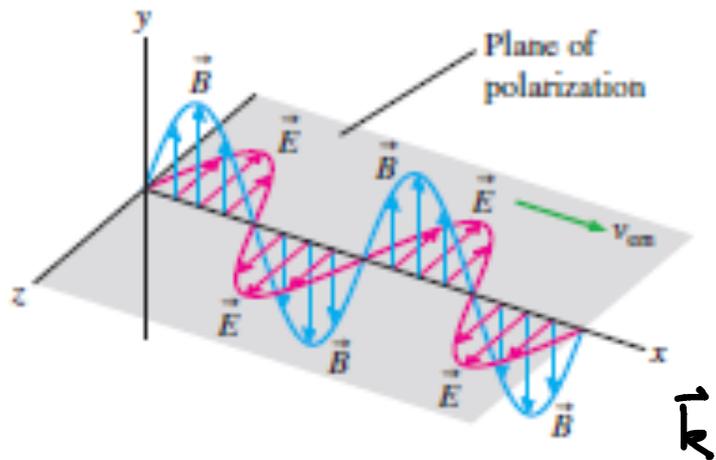
Se llama **Polarización** de la onda a la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  ;  
el plano definido por  $\vec{E}$  y  $\vec{k}$  se conoce como plano de polarización



(a) Vertical polarization



(b) Horizontal polarization



## Polarización lineal:

la amplitud del campo tiene una dirección  $\hat{e}_0$  constante:

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{i\phi} \hat{e}_0$$

## Polarización arbitraria

$$\vec{E} = (\vec{E}_0 + \vec{E}_1) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t]}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_0 &= E_0 e^{i\phi_0} \hat{e}_0 \\ \vec{E}_1 &= E_1 e^{i\phi_1} \hat{e}_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \hat{e}_0 \cdot \hat{k} &= 0 \\ \hat{e}_1 \cdot \hat{k} &= 0 \end{aligned}$$

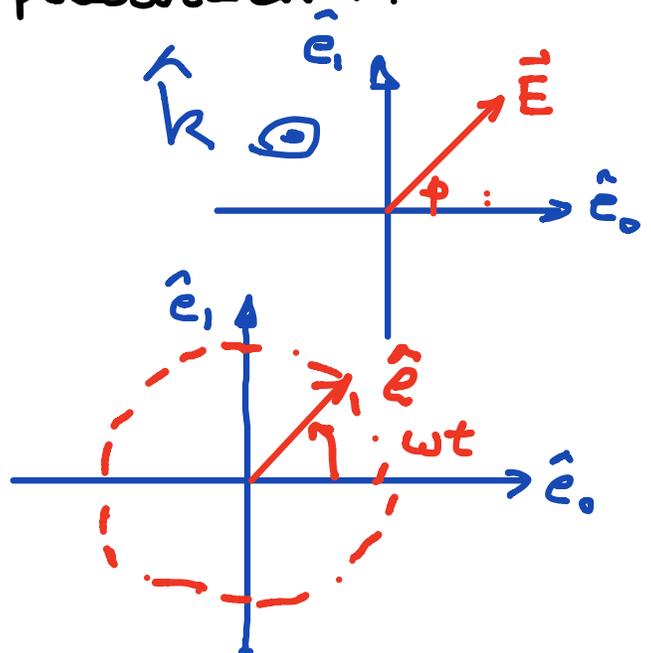
sol. linealmente indep.

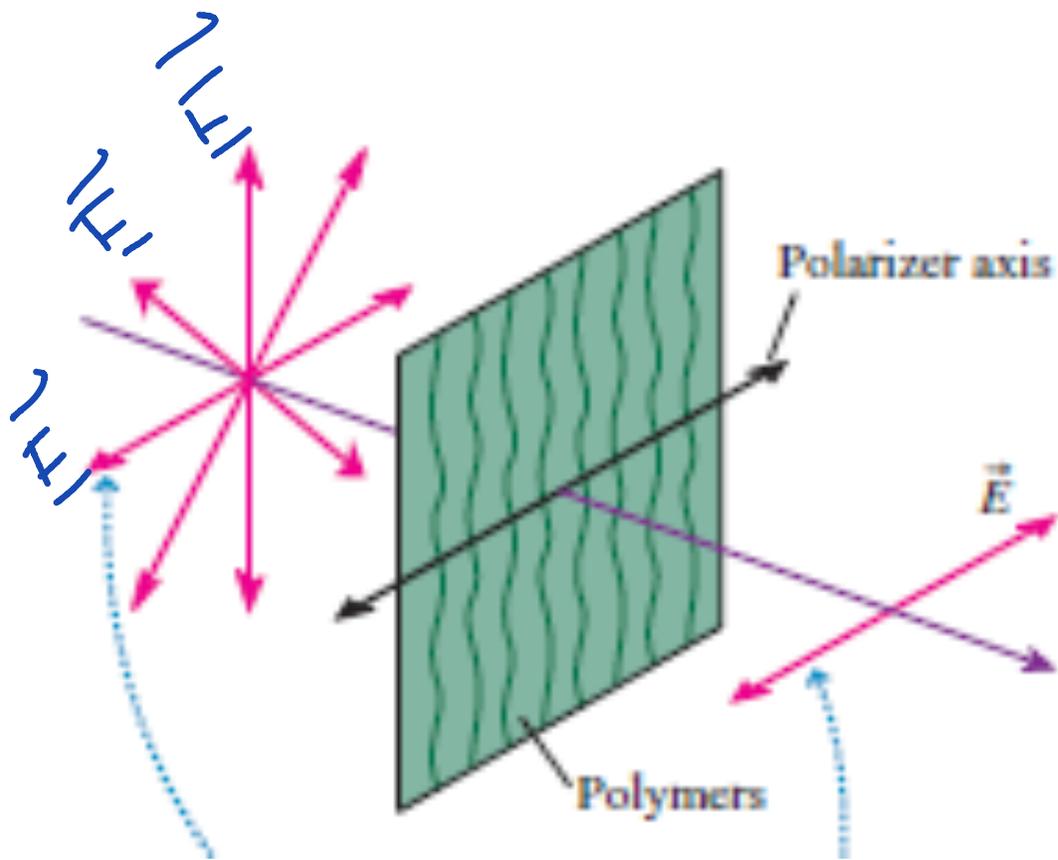
$$\vec{E} = (E_0 e^{i\phi_0} \hat{e}_0 + E_1 e^{i\phi_1} \hat{e}_1) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t]}$$

permite diferentes formas de polarización:

\* lineal  $\phi_0 = \phi_1 = \phi$

\* circular  $E_0 = E_1 = E$   
 $\phi_1 = \phi_0 \pm \frac{\pi}{2}$





*luz no polarizada*  
(luz polarizada en todas  
las direcciones posibles)

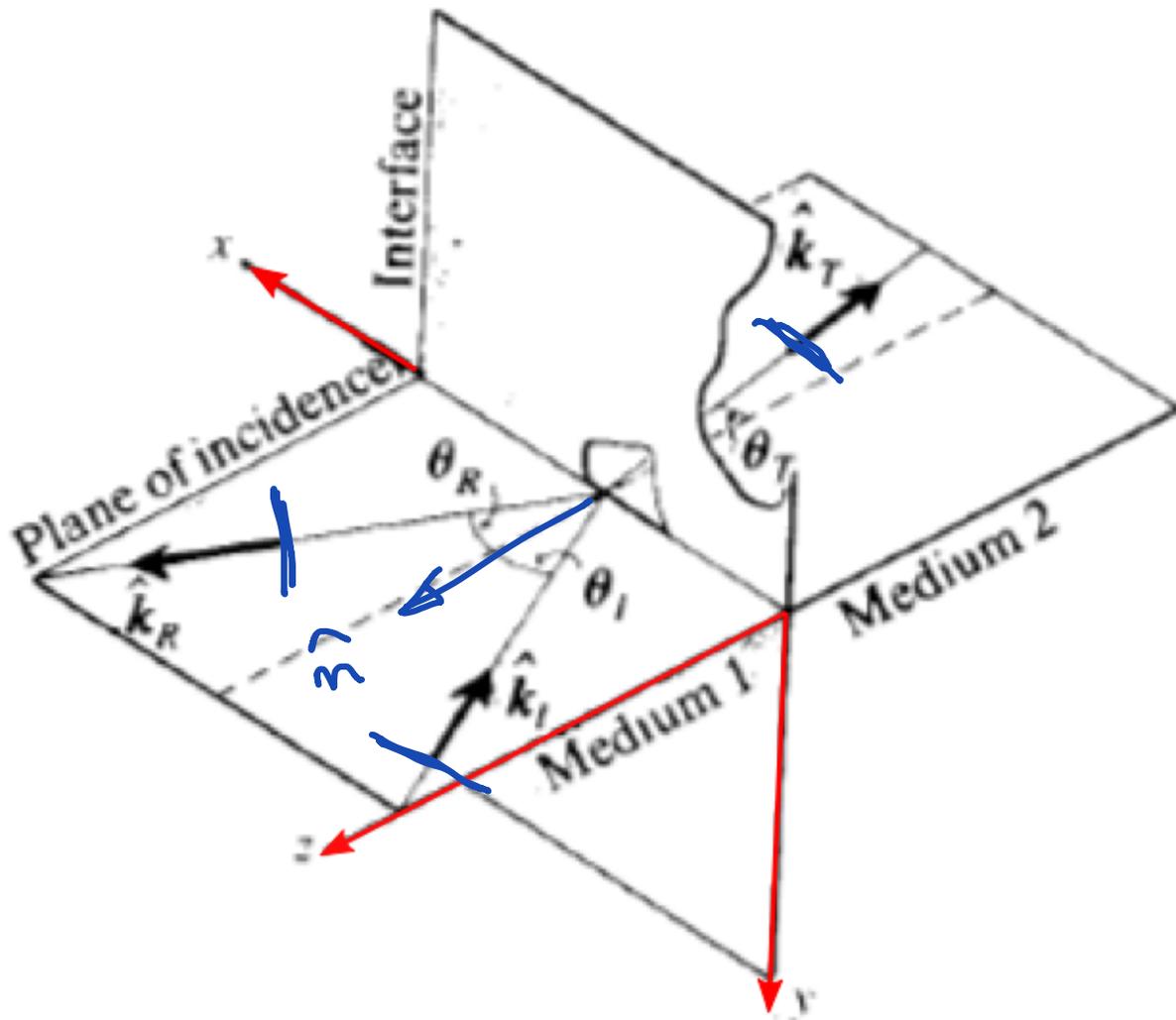
*luz polarizada*  
es transmitida



# REFLEXION Y REFRACCION DE ONDAS.

## Problema:

Estudiar el comportamiento de una onda plana monocromática al incidir en la superficie de separación de 2 medios



Onda incidente  $\rightarrow \vec{E}_i; \vec{k}_i$  en medio  $\epsilon_1 \mu_1$

Onda reflejada  $\rightarrow \vec{E}_r; \vec{k}_r$  en medio  $\epsilon_1 \mu_1$

Onda refractada  $\rightarrow \vec{E}_t; \vec{k}_t$  en medio  $\epsilon_2 \mu_2$

Conocido  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$  até determinados!

EN SUPERFICIE DE SEPARACION:

Satisfacer **CONDICIONES DE BORDE**

Suponiendo que no hay cargas ni corrientes en la superficie de separación:

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} = H_{2t}$$

se deben conservar las componentes normales y tangenciales, para todo tiempo  $t$  y en todos los puntos de la superficie

$\Rightarrow$  " todos los campos deben tener igual fase en superficie de separación "

$$[\text{fase o. incid.}]_{\text{plano}} = [\text{fase o. reflejada}]_{\text{plano}} = [\text{fase o. refrac.}]_{\text{plano}}$$

Luego:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t = \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t = \vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t \Big]_{\text{Sup. separ.}}$$

$$\Rightarrow \text{i) } \omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega$$

la frecuencia de la onda no cambia al reflejarse o transmitirse

$$\text{ii) } [\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}]_{\text{superficie}}$$

$$\text{ec. de superficie: } \vec{r} \cdot \hat{n} = 0$$

donde:  $\hat{n}$  = normal a superf.

7 origen contenido en superf.

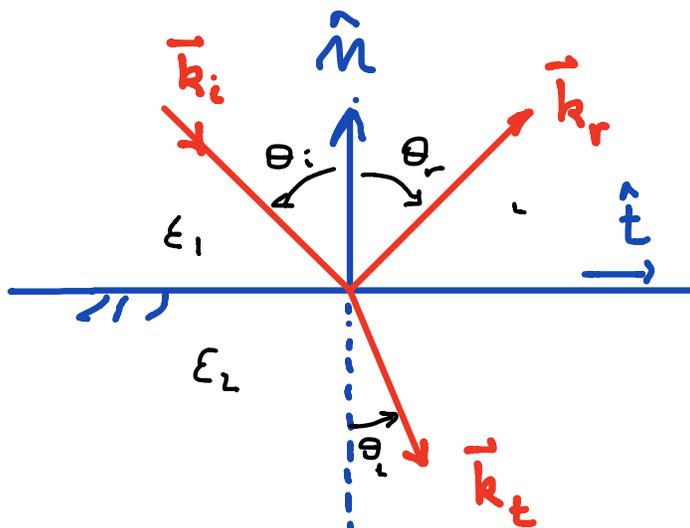
Expresar:

$$\vec{k}_i = k_i [-\cos \theta_i \hat{n} + \sin \theta_i \hat{t}]$$

$$\vec{k}_r = k_r [\cos \theta_r \hat{n} + \sin \theta_r \hat{t}]$$

$$\vec{k}_t = \text{Re}[k_t] \{-\cos \theta_t \hat{n} + \sin \theta_t \hat{t}\}$$

$$\text{donde } k_i = |\vec{k}_i| ; k_r = |\vec{k}_r| ; k_t = \text{Re}[|\vec{k}_t|]$$



Observar:  $k_t$  puede ser una cantidad compleja si medio "2" es disipativo (tiene  $\sigma_c$ )

Se concluye:

$$\underline{\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}} \Rightarrow k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r$$

pero onda inc. y reflejada se propagan en el mismo medio

$$\Rightarrow k_i = k_r \quad \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$$

$$\underline{\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}} \Rightarrow k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t$$

$$\boxed{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k_i}}$$

Snell!

La frecuencia de la onda no cambia al reflejarse o refractarse  $\rightarrow$

$$\boxed{k_i = \frac{\omega}{v_i} = \frac{\omega}{c} n_1} \quad \text{con} \quad n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

índice de refracción

✓  $k_t = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{c} n_2$  con  $n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_0 \mu_0}}$   
si medio no es disipativo

✓  $k_t = \frac{1}{\delta}$  con  $\delta$ : longitud de penetración  
 $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma_c}}$  medio muy buen conductor

## FORMA STANDARD LEY SNELL:

usando relación entre el número de onda (o magnitud del vector propagación  $\vec{k}$ ) y el índice de refracción:

$$\boxed{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}}$$

$n_1$ : índice refracción del medio donde la onda incide

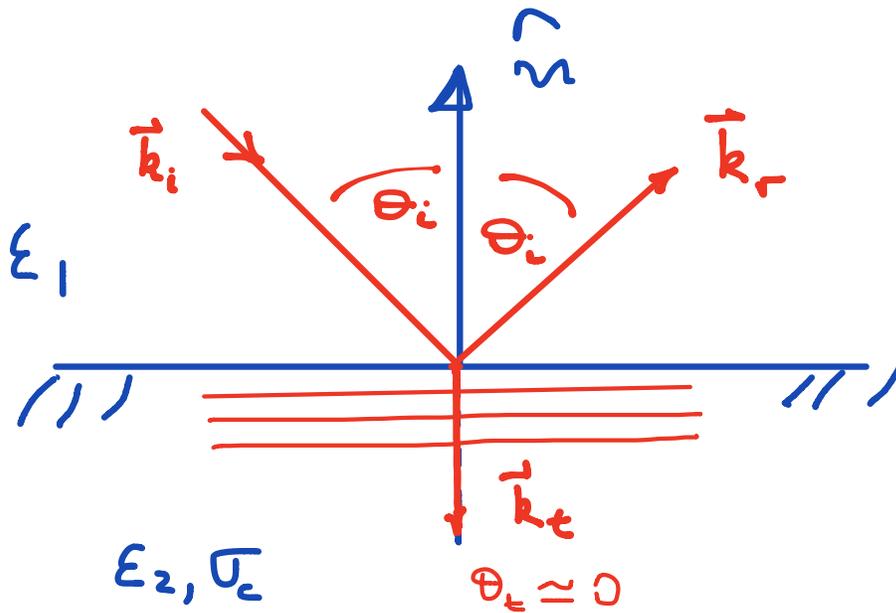
$n_2$ : índice refracción del medio donde onda se transmite (o refracta)

**CASO ESPECIAL:** medio "2" es buen conductor

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{1}{\delta n_1} = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\frac{\omega \sigma_c}{2 \epsilon_2}} \Rightarrow \theta_t \rightarrow 0$$

$\omega$  y  $\sigma_c$  altos

En efecto, el ángulo de refracción se hace muy pequeño cuando onda incide sobre un buen conductor, propagándose paralela a la superficie de separación



## REFLEXION TOTAL

El ángulo de transmisión queda determinado por

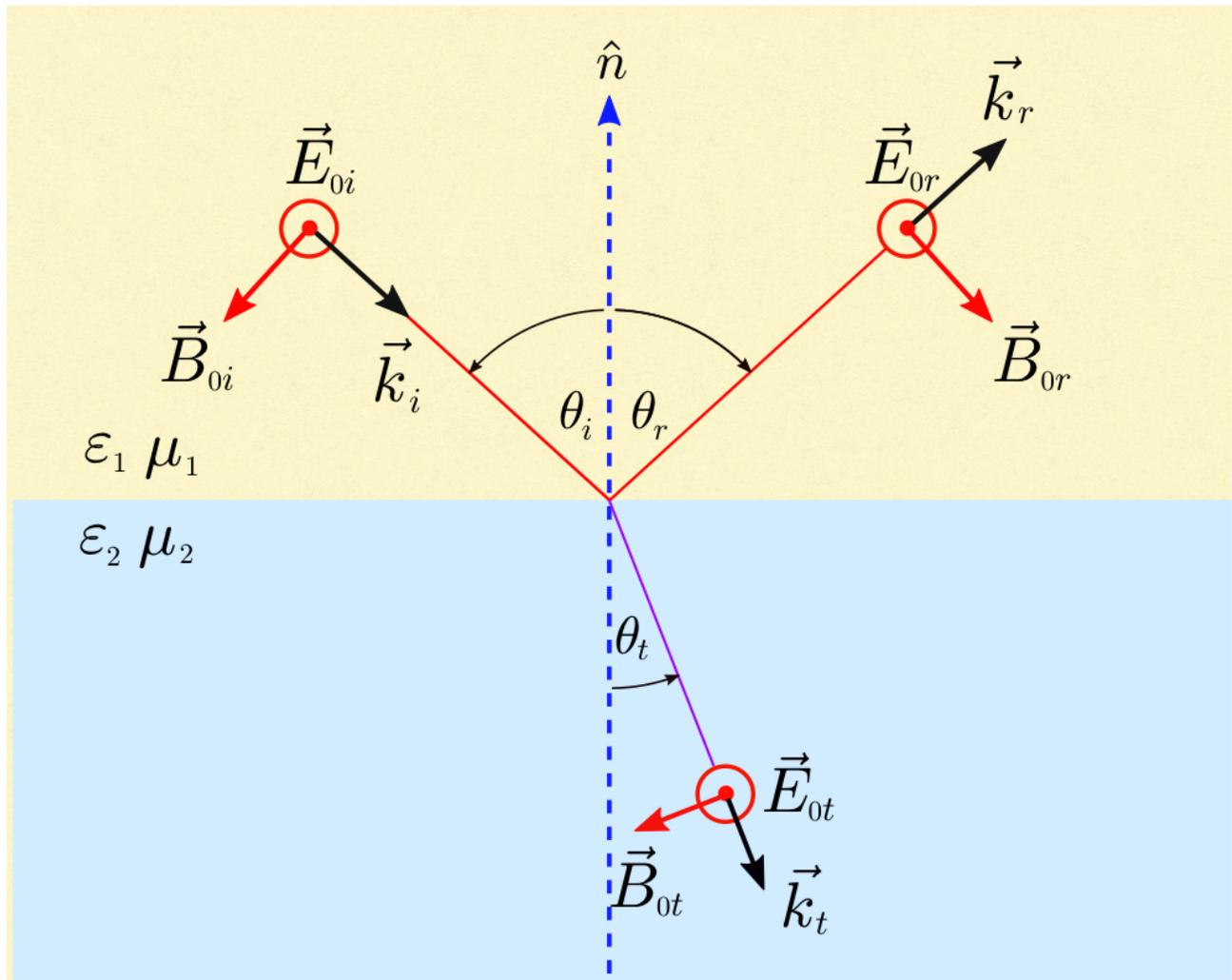
$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \Rightarrow \text{existe ángulo incidencia crítico } \theta_{ic} = \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \right]$$

sobre el cual sólo hay reflexión cuando  $n_1 > n_2$

# RELACIONES DE FRESNEL

INTERESA ESTUDIAR

- \* onda linealmente polarizada, con recta polarización  $\perp$  plano incidencia ( $\vec{k}_i; \hat{n}$ )



CONDICIÓN:  $\hat{n} \cdot \vec{E} = 0$

Aplicar condiciones de borde:

$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \text{No aporta información}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow -B_{oi} \sin \theta_i - B_{or} \sin \theta_r = -B_{ot} \sin \theta_t$$

$$\theta_i = \theta_r \rightarrow (B_{oi} + B_{or}) \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = B_{ot} \quad \begin{array}{l} \text{misma} \\ \text{anterior} \end{array}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{1}{\mu_1} [-B_{oi} \cos \theta_i + B_{or} \cos \theta_r] = -\frac{1}{\mu_2} B_{ot} \cos \theta_t$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \rightarrow \frac{k_i}{\mu_1} [-E_{oi} \cos \theta_i + E_{or} \cos \theta_r] = -\frac{k_t}{\mu_2} E_{ot} \cos \theta_t$$

Combinando las ecs. independiente es directo de mostrar:

Para  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

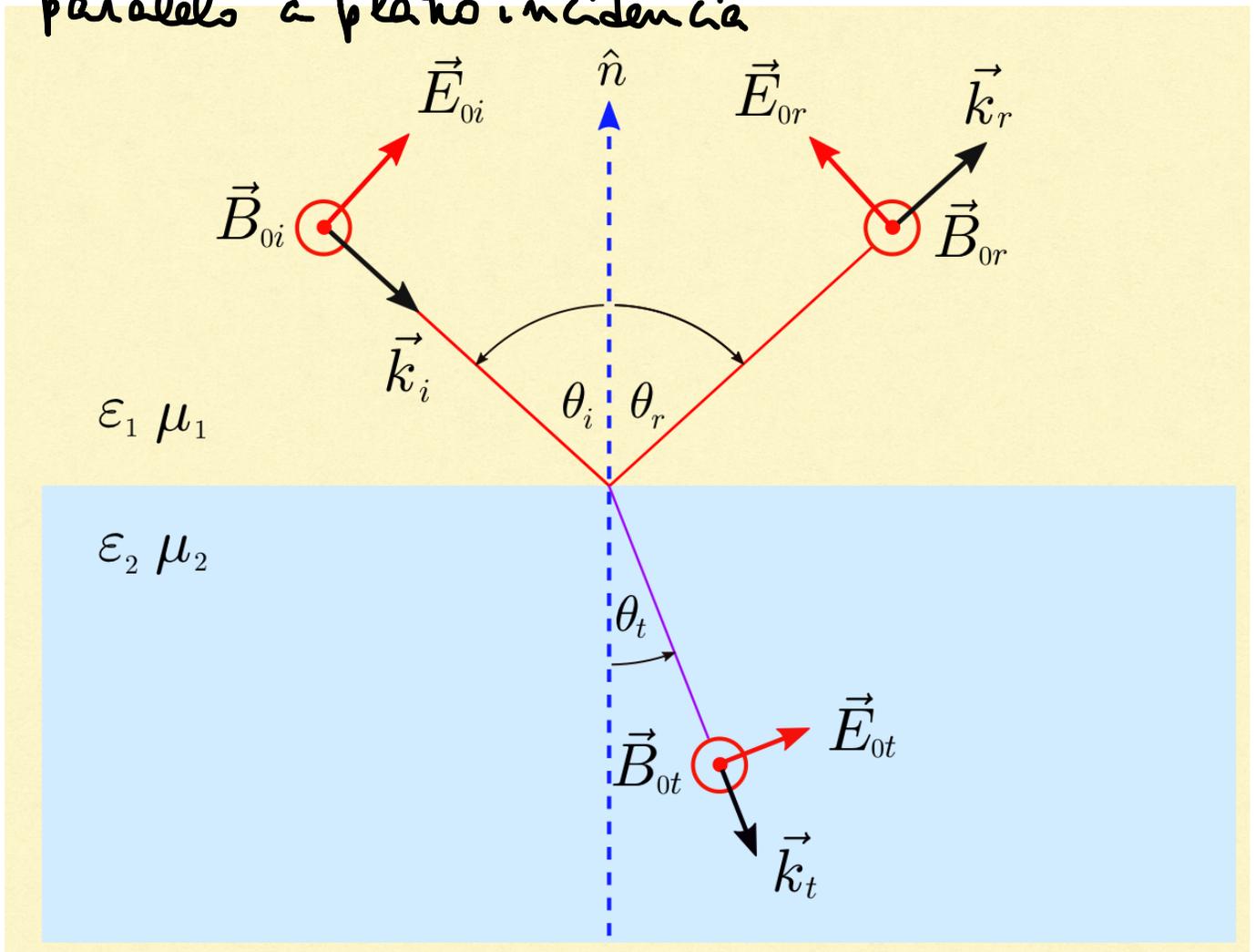
$$\frac{E_{or}}{E_{oi}} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

FRESNEL

para

$\vec{E}_i \perp$  plano  
incidencia

\* misma onda anterior con vector polarización paralelo a plano incidencia



$$D_{1n} = D_{2n} \rightarrow \epsilon_1 [E_{oi} \sin \theta_i + E_{or} \sin \theta_r] = \epsilon_2 E_{ot} \sin \theta_t$$

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_r = E_{ot} \cos \theta_t$$

$$B_{1n} = B_{2n} \rightarrow \text{No aporte}$$

$$H_{1t} = H_{2t} \rightarrow \frac{1}{\mu_1} [B_{oi} + B_{or}] = \frac{1}{\mu_2} B_{ot}$$

El resultado ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ )

$$\frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

FRESNEL  
 $\vec{E}_i$  en plano  
incidencia

$$\frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

### ÁNGULO DE BREWSTER:

Observar que en este caso, cuando la onda está polarizada linealmente en el plano de incidencia, existe un ángulo incidente para el cual la onda NO se refleja,

$$\theta_i \rightarrow \theta_B \text{ tal que } \left| \theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2} \right|$$

y  $\theta_B \equiv$  ángulo de Brewster determinado por

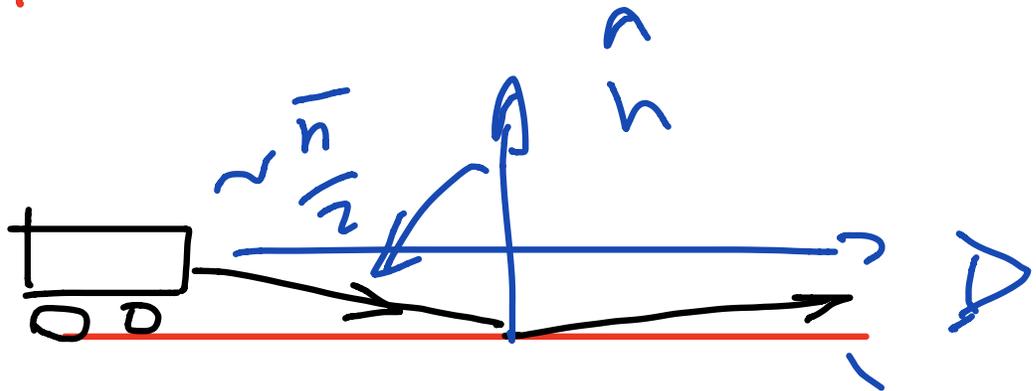
$$\underline{\theta_B = \tan^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right)}$$

$\Rightarrow$  Para onda no polarizada que incide con  $\theta_B \Rightarrow$  existe una onda reflejada polarizada  $\perp$  a plano de incidencia

CASO  $\theta_i = \frac{\pi}{2}$

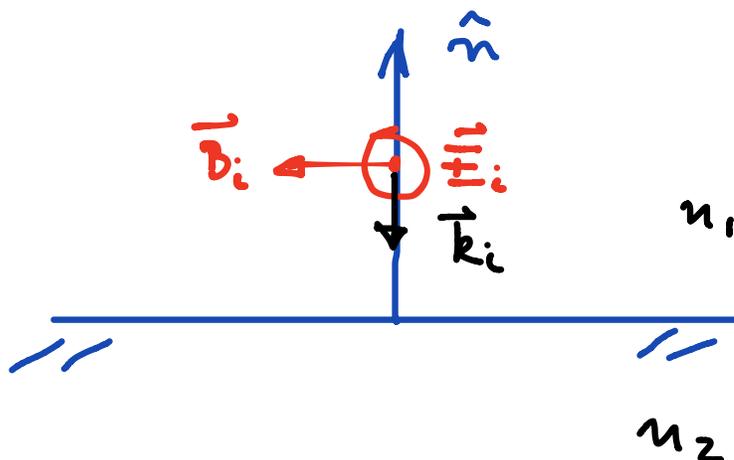
Es directo verificar que en este caso no hay transmitida y toda la onda es reflejada!

(efecto de la luz de vehículos en carretera mojada)



PROPUESTO:

- \* Estudiar el caso de **incidencia normal** sobre una superficie ( $\theta_i = 0$ )



- \* Analizar el caso cuando la onda incide en un plano conductor perfecto ( $\sigma_c \rightarrow \infty$ )

## PROPUESTO

Calcular los coeficientes de reflexión y transmisión definidos como

$$R = - \frac{\langle \vec{S}_r \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_i \cdot \hat{n} \rangle}$$

$$T = \frac{\langle \vec{S}_t \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_i \cdot \hat{n} \rangle}$$

$\vec{S} \equiv$  vector  
Poynting

Verificar  $R + T = 1$