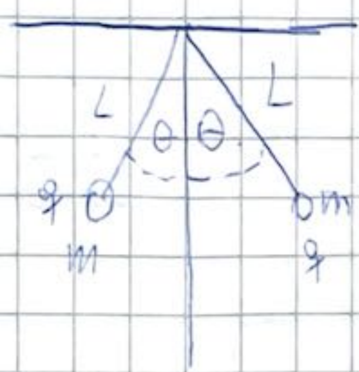
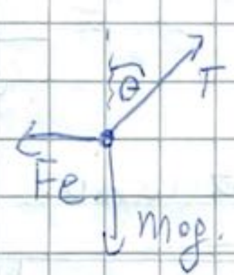
Aux 1

P1



En primer lugar, basta con analizar solo una partícula, y asumir que la otra crea un campo eléctrico que afecta a la primera. Tomando la partícula izquierda, se realiza y DCL sobre él



Como la partícula está en reposo, $\sum F = 0$.

En el caso de las fuerzas en $\hat{y}$, tenemos

F_y) $0 = -m \cdot g + T \cdot \cos\theta \Rightarrow T = \dfrac{m \cdot g}{\cos\theta}$ (1)

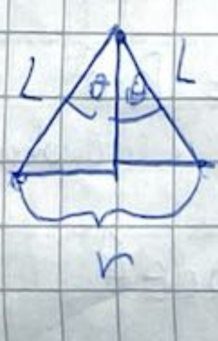
En $\hat{x}$, tenemos

F_x) $0 = T \cdot \sin\theta - Fe \Rightarrow Fe = T \cdot \sin\theta$

Pero es necesario el valor de Fe, donde está dado por:

$Fe = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$; pero $q_1 = q_2$, luego

$Fe = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q^2}{r^2}$; Pero r es la distancia entre ambas cargas, lo cual se puede calcular de la simetría



$r = L \cdot \sin\theta + L \cdot \sin\theta$

$r = 2L\sin\theta$

Reemplazando el valor de r, tenemos

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4L^2\sin^2\theta}$$

$$T\cdot\sin\theta = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 L^2\sin^2\theta} \Rightarrow T = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 L^2\sin^3\theta} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2), tenemos

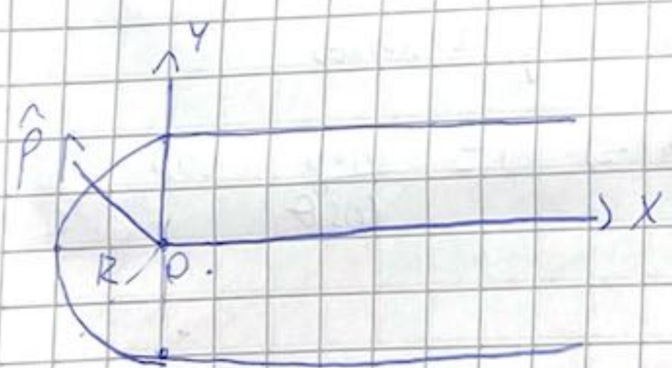
$$\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 L^2\sin^3\theta} = \frac{m\cdot g}{\cos\theta}$$

$$q^2 = 16\pi\varepsilon_0 L^2 \sin^2\theta \overbrace{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}^{\tan\theta}$$

$$q^2 = 16\pi\varepsilon_0 L^2\sin^2\theta\tan\theta$$

$$\boxed{q = 4L\sin\theta\sqrt{\pi\varepsilon_0\tan\theta}}$$

P2|



En primer lugar, se sitúa el centro de referencia en el punto O; luego separamos el problema en 2, la semicircunferencia y los dos ejes. Finalmente, el campo total será la suma de ambos (debido al principio de superposición). Como todas son distribuciones lineales, se utilizará la siguiente expresión

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec r - \vec r\,'}{\|\vec r - \vec r\,'\|^3}\lambda\cdot dl$$ → diferencial de línea

1) Semicircunferencia:

En este caso $\vec r = 0$; $\vec r\,' = R\cdot\hat\rho$

Como es circunferencial, utilizaremos coordenadas cilíndricas

$$dl = \cancelto{0}{d\rho}\,\hat\rho + \rho\, d\theta\,\hat\theta + \cancelto{0}{dz}\,\hat z \Rightarrow dl = \rho\, d\theta\,\hat\theta$$

Reemplazando, tenemos

$$\vec{E}_1(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{0 - R^2 d\theta\,\hat{\rho}\cdot\hat{e}}{R^3}$$

Notar que los límites serán desde $\pi/2$ hasta $\frac{3\pi}{2}$.

Como tenemos $\hat{\rho}$, es necesario expresarlo en términos cartesianos, debido a que $\hat{\rho}$ cambia con respecto a θ.

$$\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{E}_1(r) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\underbrace{\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})\,d\theta}_{-2}$$

$$\vec{E}_1(r) = \frac{-2\lambda(-1)}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{x} \Rightarrow \vec{E}_1(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{x}$$

(2). Alambres:

Tomando el alambre superior, se tiene que $\vec{r} = 0$, $\vec{r}' = x\hat{x} + R\hat{y}$. Finalmente, el alambre solo se extiende en x, por lo que $d\ell = dx$

$$\vec{E}_2(0) = -\left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{x\,dx\,\hat{x} + R\,dx\,\hat{y}}{(x^2+R^2)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^\infty \frac{x\,dx\,\hat{x}}{(x^2+R^2)^{3/2}} + R\int \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\hat{y}\right]$$

Realizando el CV ; $x = R\tan(u)$
$dx = R\sec^2(u)\,du$

tenemos:

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{R\tan(u)\,R\sec^2(u)\,du\,\hat{x}}{(R^2\tan^2(u)+R^2)^{3/2}} + R\int_0^{\pi/2}\frac{R\sec^2(u)\,du}{(R^2 tg^2(u)+R^2)^{3/2}}\hat{y}\right]$$

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{R^2\,tg(u)\sec^2(u)\,du\,\hat{x}}{R^3(tg^2(u)+1)^{3/2}} + R\int_0^{\pi/2}\frac{R\sec^2(u)\,du\;\hat{y}}{R^3(tg^2(u)+1)^{3/2}}\right]$$

Pero $tg^2(u)+1 = sec^2(u)$.

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{\pi/2} \frac{tg(u)\cancel{sec^2(u)}du}{R\,sec^{\cancel{2}3}(u)}\hat{x} + \frac{\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}}\int_0^{\pi/2}\frac{\cancel{sec^2(u)}du}{sec^{3}(u)}\right]$$

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{R4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(u)}{\cancel{\cos(u)}}\cancel{\cos(u)}du\,\hat{x} + \int_0^{\pi/2}\cos(u)du\,\hat{y}\right]$$

$$\vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}[\hat{x}+\hat{y}]$$

En el caso del alambre inferior, el resultado es análogo, pero con signo contrario en y, luego:

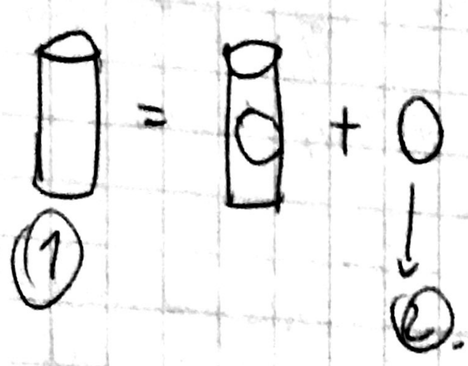
$$\vec{E}_{2T} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}[\hat{x}+\cancel{\hat{y}}] + \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}[\hat{x}-\cancel{\hat{y}}]$$

$$\vec{E}_{2T} = \frac{-2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{x} \Rightarrow \vec{E}_{2T} = \frac{-\lambda\,\hat{x}}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Finalmente, el campo total será:

$$\vec{E}_T = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{x} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{x} = \vec{0}.$$

mos que usar el principio de superpocición:



Encontrando el campo 1 y 2, estamos listos.

1. Usando coordenadas cilíndricas, tenemos.

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{([\rho + h] - [r + z])}{[\quad \%\quad]^{3/2}}$$

Esta integral es horrible, por lo cual calcularemos el campo de un cable infinito y lo extenderemos al cilindro:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \, dl (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

Donde $r = \rho\hat{\rho} + h\hat{z}$

$\vec{r}\,' = z\hat{z}$.

Entonces, $\vec{r} - \vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} + h\hat{z} - z\hat{z}$

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = \rho\hat{\rho} + (h - z)\hat{z}.$$

$$\|\vec{r} - \vec{r}\,'\| = \sqrt{\rho^2 + (h - z)^2}.$$

Luego, el campo será:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\rho\hat{\rho} + (h - z)\hat{z})\, dz}{(\rho^2 + (h - z)^2)^{3/2}} \right).$$

Separando, tenemos

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \rho\hat{\rho}\, dz}{(\rho^2 + (h - z)^2)^{3/2}} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(h - z)\, dz\, \hat{z}}{(\rho^2 + (h - z)^2)^{3/2}} \right)$$

Usando $-(h - z) = \rho\tan(u)$

$+ dz = \rho\sec^2(u)\, du$ Tenemos:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2 \sec^2(u)\,du\,\hat{\rho}}{(\rho^2+\rho^2\tan^2(u))^{3/2}} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan(u)\cdot\rho^2\sec^2(u)}{(\rho^2+\rho^2\tan^2(u))}\right.$$

Recordando que $(1+\tan^2(u) = \sec^2(u)$, tenemos

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cancel{\rho^2\sec^2(u)}\,du}{\rho^3\sec^3(u)} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan(u)\cdot\rho^2\sec^2(u)\,du}{\rho^3\sec^3(u)}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(u)\,du}{\rho} - \cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(u)\,du}{\rho}}\right) \rightarrow 0$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda\,\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0\rho}}$$

Luego, usando que $\lambda = \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial z} = \sigma\frac{dV}{\partial z}$

$$\lambda = \sigma\frac{\partial}{\partial z}(\pi R^2 z) = \sigma\pi R$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma\cancel{\pi}R^2}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0\rho} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma R^2\,\hat{\rho}}{2\varepsilon_0\rho}} \quad (1)$$

Luego, para encontrar (2) hay que asumir que fuera de una esfera esta se ve como una carga puntual (se demostraré con Gauss después), pero necesitamos la carga:

$$Q = \iiint \sigma\,dV = \sigma\iiint dV = \sigma\cdot\frac{4}{3}\pi R_0^3$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R_0^3\,\vec{r}}{3\varepsilon_0\|\vec{r}\|^3}$$

Pero $\vec{r} = h^2+\rho^2$

$$\Rightarrow E_{TOT} = \frac{\sigma R^2\hat{\rho}}{2\varepsilon_0\rho} - \frac{\sigma R_0^3}{2\varepsilon_0}\frac{(h\hat{z}+\rho\hat{\rho})}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}$$