Pauta Aux 23

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

26 de noviembre de 2021

P1. Comenzamos con un problema simple, en este caso tomaremos el angulo θ tal como esta en la figura, i.e., asociado a la vara de largo $2L$, esto significa que el otro ángulo es $\pi/2-\theta$. Hagamos un poco de trigonometría primero, pues nos será util mas adelante

$$\cos(\pi/2-\theta)=\cos(\pi/2)\cos(\theta)-\sin(-\theta)\sin(\pi/2)=sin(\theta) \tag{1}$$
$$\sin(\pi/2-\theta)=\sin(\pi/2)\cos(\theta)+\sin(-\theta)\cos(\pi/2)=\cos(\theta) \tag{2}$$

Ok, ahora si podemos empezar. Lo primero que nos piden es la posición de equilibrio, una manera de obtenerla es primero pensar, cuando este sistema estará en equilibrio. Sabemos que podemos ir al sistema del centro de masa y hacer como que todas las fuerzas, actúen ahí, como en este caso la unica fuerza que actúa es el peso, este no generara movimiento cuando el centro de masa se ubique justo debajo del punto del que cuelga este sistema. Escribamos entonces el centro de masa,

Si usamos el eje $\hat{\imath}$ apuntando hacia la derecha y el eje $\hat{\jmath}$ apuntando hacia arriba:

$$\begin{aligned}
\vec{R}_{\mathrm{CM}} &= \frac{\sum m\vec{r}_i}{\sum m} \\
&= \frac{1}{2m}\Big(mL(-\sin(\pi/2-\theta)\hat{\imath}-\cos(\pi/2-\theta)\hat{\jmath})+2mL(\sin(\theta)\hat{\imath}-\cos(\theta)\hat{\jmath}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(-L\cos(\theta)+2L\sin\theta)\hat{\imath}-\frac{1}{2}(L\sin(\theta)+2L\cos(\theta))\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Entonces, la condicion de equilibrio será:

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}}(\theta)\cdot\hat{\imath}=0$$

Imponiendo esa condición obtenemos:

$$\frac{1}{2}(-L\cos(\theta)+2L\sin(\theta))=0 \tag{3}$$
$$-\cos(\theta)+2\sin(\theta)=0 \tag{4}$$
$$\cos(\theta)=2\sin(\theta) \tag{5}$$
$$\cos^2(\theta)=4\sin^2(\theta) \tag{6}$$
$$\cos^2(\theta)=4(1-\cos^2(\theta)) \tag{7}$$
$$\cos^2(\theta)=\frac{4}{5} \tag{8}$$
$$\cos(\theta)=\frac{2}{\sqrt{5}} \tag{9}$$
$$\implies \sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{10}$$

Este resultado tambien se puede obtener igualando los torque de ambas partículas, pero me parece interesante e útil mostrales otros enfoques.

Para la segunda parte nos piden encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones, para esto tenemos que escribir la ecuacion de torques.

$$I\ddot{\theta}=\tau_{ext} \tag{11}$$

Perfecto, en este problema la unica fuerza que ejerce torque es el peso y para nuestra suerte, podemos decir que el torque del peso es el equivalente a que todo el peso se aplicara sobre el CM, así:

$$\tau_{ext}=\vec{R}_{\text{cm}}\times(-2mg\hat{j})$$

, ya sabemos que

$$\vec{R}_{\text{cm}}==\frac{1}{2}(-L\cos(\theta)+2L\sin\theta)\hat{i}-\frac{1}{2}(L\sin(\theta)+2L\cos(\theta))\hat{j}$$

Por lo que el producto cruz solo considerará la componente en $\hat{i}$. Así:

$$I\ddot{\theta}=-2mg\frac{1}{2}(-L\cos(\theta)+2L\sin(\theta)) \tag{12}$$

La inercia se puede calcular facilmente:

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i r_i^2 \\ &= mL^2+m(2L)^2 \\ &= 5mL^2 \end{aligned}$$

Por lo que la ecuacion de torques será:

$$5mL^2\ddot{\theta}=mgL(\cos(\theta)-2L\sin(\theta))$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{5L}(2\sin(\theta)-\cos(\theta))=0$$

Ahora para encontrar los puntos de equilibrios, debemos hacer un cambio de variable

$$\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$$

con ϵ pequeño, lo que es procedimiento típico de pequeñas oscilaciones. Usando que $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{5L}(2\sin(\theta_{eq} + \varepsilon) - \cos(\theta_{eq} - \varepsilon)) = 0 \tag{13}$$
$$\tag{14}$$

Usando el seno y coseno de la suma tenemos que

$$\sin(\theta_{eq} + \varepsilon) = \sin(\theta_{eq})\cos(\varepsilon) + \sin(\varepsilon)\cos(\theta_{eq})$$
$$\cos(\theta_{eq} + \varepsilon) = \cos(\theta_{eq})\cos(\varepsilon) - \sin(\theta_{eq})\sin(\varepsilon)$$

Ahora como ε es pequeño, podemos aproximar $\sin(\varepsilon) \sim 0$ y $\cos(\varepsilon) \sim 1$ Nuestra ecuación de torques queda:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{5L}(2\sin(\theta_{eq}) + 2\varepsilon\cos(\theta_{eq}) - \cos(\theta_{eq}) + \varepsilon\sin(\theta_{eq})) = 0$$
$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{5L}(2\cos(\theta_{eq}) + \sin(\theta_{eq})) = 0$$

Donde los terminos constantes se anularon entre ellos, y por lo tanto la frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega^2 = \frac{g}{5L}(2\cos(\theta_{eq}) + \sin(\theta_{eq})) = \frac{g}{\sqrt{5}L} \tag{15}$$

Con lo que se termina el problema c:

P2. **G.4 Guá Aceituno** Para este problema tenemos una condición inicial donde ocurrirá una colisión. Luego de la colisión las masas seguirán juntas y el sistema comenzara a rotar en torno al punto P, esto por conservación de momentum lineal.

En el auxiliar opte por calcular la velocidad angular inicial $\dot{\phi}(t = t^*)$, tal que en t^* ocurre la colisión al final, cuando lo necesitábamos, en esta pauta lo haré al principio. Primero veamos con que velocidad queda el sistema de las dos masas pegadas:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \tag{16}$$
$$-mv_o\hat{x} = 2m * \vec{v}_1 \implies \vec{v}_1 = \frac{v_o}{2}\hat{x} \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

Con lo que tenemos la velocidad de las dos masas que quedan pegadas. Ahora calculemos la velocidad del CM.

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{\sum m_i} \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{19}$$
$$= \frac{1}{6m} \left(2m \cdot \frac{v_o}{2} \hat{x} \right) \tag{20}$$
$$= \frac{v_o}{6} \hat{x} \tag{21}$$

Ahora para ver la velocidad angular en t^*, tenemos que sacar la componente perpendicular al $\vec{R}_{CM}$. Puesto que la otra componente es cancelada por el roce estatico, en el auxiliar cometi el error de decir que toda la velocidad seria tangencial, pero eso no es cierto. Vamos a tener una perdida. Para ver la componente que es velocidad tangenial, podemos notar que el angulo entre el eje x y $\vec{R}_{CM}$ es $\pi/6$, esto porque tiene que ser la mitad del angulo interno del triangulo, que es equilatero. Esto porque las masas son iguales, si no lo fueran entonces no estaria en el centro geometrico y el angulo seria otro.

Entonces la componente de la velocidad que es perpendicular al brazo es

$||\vec{V}_t|| = ||\vec{V}_{CM}|| \sin(\pi/6)$

Asi la velocidad angular será:

$$\dot{\theta}(t=0) = \frac{||\vec{V}_{CM}|| \sin \pi/6}{||\vec{R}_{CM}||} \tag{22}$$

Donde calcularemos $\vec{R}_{CM}$ para poder calcular su norma. Para calcular $\vec{R}_{CM}$ necesitamos los vectores que apuntan a cada particula desde el origen. Tomaremos como origen el punto P, y etiquetaremos a la masa de arriba con el indice 1 y a la masa de la derecha con 2. Así:

$$\vec{r}_1 = b\cos(\pi/3)\hat{i} + b\sin(\pi/3)\hat{j} = b/2\hat{i} + b\sqrt{3}/2\hat{j} \tag{23}$$
$$\vec{r}_2 = b\hat{i} \tag{24}$$

Calculemos entonces el $\vec{R}_{CM}$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{6m} \sum m_i \vec{r}_i \tag{25}$$
$$= \frac{1}{6m} \left(2m(b/2\hat{i} + b\sqrt{3}/2\hat{j}) + 2mb\hat{j} \right) \tag{26}$$
$$= \frac{1}{2} b\hat{i} + \frac{b\sqrt{3}}{6} \hat{j} \tag{27}$$

Ahora calculemos la inercia,

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{28}$$

Pero antes de hacer la sumatoria, notamos que $r_i^2 = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = ||\vec{r}_i||^2$. Y en nuestro caso, tanto $\vec{r}_1$ como $\vec{r}_2$ son vectores de largo b. Por lo que $r_1^2 = r_2^2 = b^2$ Entonces:

$$I = 2mb^2 + 2mb^2 = 4mb^2 \tag{29}$$

Ahora queremos resolver la ecuacion:

$$I\ddot{\theta} = \tau_{ext} \tag{30}$$

Por lo que necesitamos encontrar los torques, como en el problema hay gravedad, ejerce torque. Y no hay mas fuerzas que hagan toque.

$$\begin{aligned}
\tau_{mg} &= \vec{r} \times \vec{F} &(31)\\
&= \vec{R}_{CM} \times (-6mg\hat{j}) &(32)
\end{aligned}$$

Pero notamos que nuestro vector de centro de masa, es solo valido para el instante inicial, despues tenemos que va rotando. Para encontrarlo utilizaremos el vector que tenemos y lo multiplicaremos por una matiz de rotacion.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{33}$$

Asi tendremos $\vec{R}_{CM}(\theta) = R(\theta)\vec{R}_{CM}(0)$

$$\vec{R}_{CM}(\theta) = (b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta))\hat{\imath} + (b/2\sin(\theta) + \frac{b\sqrt{3}}{6}\cos(\theta))\hat{\jmath} \tag{34}$$

Ahora podemos calcular el torque:

$$\begin{aligned}
\tau_{mg} &= ((b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta))\hat{\imath} + (b/2\sin(\theta) + \frac{b\sqrt{3}}{6}\cos(\theta))\hat{\jmath}) \times (-6mg\hat{\jmath}) &(35)\\
&= -6mg(b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta))\hat{k} &(36)
\end{aligned}$$

Con lo que podemos escribir la ecuacion de torque:

$$\begin{aligned}
I\ddot{\theta} &= \tau_{ext} &(37)\\
4mb^2\ddot{\theta} &= -6mg(b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta)) &(38)\\
4b\ddot{\theta} &= -3g\cos(\theta) + \sqrt{3}g\sin(\theta) &(39)
\end{aligned}$$

Que es una ecuacion que podemos resolver integrando con el trucazo de mecanica. Por lo que necesitamos ver entre que instantes vamos a integrar, ya tenemos las condiciones iniciales, que son cuando ocurre el choque, por lo que nos falta determinar las condiciones finales, que serian cuando podemos decir que el sistema va a volcar. Si vemos el torque del peso, podemos notar que mientras el centro de masas tenga compoenente en el eje x positiva, entonces el toque va a evitar que vuelque, pues cuando la componente en el eje x del CM se vuelve 0, el toque es nulo y para un angulo un poco mas grande cambia de signo. Por lo que queremos encontar el θ_{crit}, que cumple que la componente en x del CM es 0. Entonces queremos

$$\frac{b}{2}\cos(\theta) - \frac{b}{6}\sqrt{3}\sin(\theta) = 0 \tag{40}$$

$$3\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 0 \implies \tan(\theta) = \sqrt{3} \tag{41}$$

$$\implies \theta_{crit} = \pi/3 \tag{42}$$

Y tambien, para que no vuelque, queremos que cuando $\theta = \theta_{crit}$, tengamos que la velocidad angular sea 0, ie $\dot{\theta}(\theta = \theta_{crit}) = 0$ Ahora que tenemos las condiciones iniciales y finales, podemos resolver la EDO.

$$4b\ddot{\theta} = -3g\cos(\theta) + \sqrt{3}g\sin(\theta) \tag{43}$$

$$4b\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -3g\cos(\theta) + \sqrt{3}g\sin(\theta) \tag{44}$$

$$4b\int_{\dot{\theta}=}^{\dot{\theta}=0}\dot{\theta}d\dot{\theta} = -3g\int_{0}^{\theta_{crit}}\cos(\theta)d\theta + \sqrt{3}g\int_{0}^{\theta_{crit}}\sin(\theta)d\theta \tag{45}$$

$$4b(0 - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2}) = -3g\sin(\pi/3) + \sqrt{3}g(1 - \cos(\pi/3)) \tag{46}$$

$$-2b\dot{\theta}^2(0) = -3g\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}g/2 \tag{47}$$

$$-2b\dot{\theta}^2(0) = \sqrt{3}g(-3/2 + 1/2) \tag{48}$$

$$\dot{\theta}^2(0) = \sqrt{3}g/(2b) \tag{49}$$

Ahora reemplazamos el valor que tenemos para $\dot{\theta}(0)$, para lo que necesitamos
$||\vec{R}_{CM}|| = \sqrt{(b/2)^2 + (b\sqrt{3}/2)^2} = b\sqrt{1/4 + 1/12} = b\sqrt{1/3}$
Entonces:

$$\frac{v_o^2}{36}\sin^2(\pi/6)\frac{3}{b^2} = \sqrt{3}g/(2b) \tag{50}$$

$$\frac{v_o^2}{4b^2} = 12\sqrt{3}g/(2b) \tag{51}$$

$$v_o = \sqrt{24b\sqrt{3}g} \tag{52}$$

item[P3.] Esta pregunta es muy estandar a solido rigido, la ecuacion principal que usaremos sera

$$I_0\ddot{\theta} = \tau_0^{ext} \tag{53}$$

Donde I_0 es la inercia y τ_0^{ext} son los torques externos. Primero calcularemos la Inercia, tomaremos como origen el punto donde el aro toca el suelo, asi:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = m(\sqrt{2}R)^2 + m(2R)^2 + m(\sqrt{2}R)^2 = 8mR^2 \tag{54}$$

Ahora que tenemos la inercia, tenemos que calcular el torque, en este caso como hay gravedad, esta ejercera un torque, por lo que calcularemos $\vec{R}_{cm}$ para asi tener el torque:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m(R\hat{\rho} - R\hat{\theta}) + m2R\hat{\rho} + m(R\hat{\rho} + R\hat{\theta})}{3m} \tag{55}$$

$$\implies \vec{R}_{cm} = \frac{4R}{3}\hat{\rho} \tag{56}$$

Asi el torque del peso será:

$$\tau_g = \vec{R}_{cm} \times 3mg(-\cos(\theta)\hat{\rho} + \sin(\theta)\hat{\theta}) = 4Rmg\sin(\theta)\hat{k} \tag{57}$$

Con lo que podemos escribir:

$$8mR^2\ddot{\theta} = 4Rmg\sin(\theta) \tag{58}$$

Usando el truco de mecanica e integrando tenemos:

$$\int_0^{\dot{\theta}} 2R\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} g\sin(\theta)d\theta \tag{59}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g(1-\cos(\theta))}{R} \tag{60}$$

Y eso es todo lo que podemos avanzar por ahora, necesitamos mas ecuaciones, podemos aplicar la segunda ley sobre el centro de masas, para lo cual necesitamos la aceleracion del centro de masas:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{4R}{3}\hat{\rho} \tag{61}$$

$$\implies \frac{d}{dt}\vec{R}_{cm} = \frac{4R}{3}\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{62}$$

$$\implies \frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_{cm} = -\frac{4R}{3}\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \frac{4R}{3}\ddot{\theta}\hat{\theta} \tag{63}$$

Ahora que encontramos la aceleracion del centro de masa, tenemos que hay una normal en el punto de contacto y que por lo tanto apunta en direccion radial $\hat{\rho}$, una fuerza de roce en la coordenada angular y el peso, escribiendo entonces la segunda ley de Newton para el centro de masa tenemos:

$$3m\left(-\frac{4R}{3}\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \frac{4R}{3}\ddot{\theta}\hat{\theta}\right) = N\hat{\rho} - f_r\hat{\theta} + 3mg(-\cos(\theta) + \sin(\theta)\hat{\theta}) \tag{64}$$

Separando por componentes:

$$-4mR\dot{\theta}^2 = N - 3mg\cos(\theta) \tag{65}$$
$$4mR\ddot{\theta} = f_r + 3mg\sin(\theta) \tag{66}$$

Si reemplazamos la ecuacion (53) en la ecuacion (58) obtenemos:

$$N = 7mg\cos(\theta) - 4mg \tag{67}$$

Y usando la ecuacion (51) en (59), tendremos que:

$$f_r = mg\sin(\theta) \tag{68}$$

Con lo que encontramos la normal y la fuerza de roce, lo siguiente a calcular son las fuerzas de adherencia (nombre elegante para normales) de la masa A cuando esta en $\theta = \pi/4$.

$$\vec{R}_A = R(\hat{\rho} - \hat{\theta}) \tag{69}$$
$$\implies \frac{d}{dt}\vec{R}_A = R\dot{\theta}(\hat{\rho} + \hat{\theta}) \tag{70}$$
$$\implies \frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_A = R(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2)\hat{\rho} + R(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2)\hat{\theta} \tag{71}$$

Con lo que escribimos la segunda ley de Newton para la masa A:

$$m(R(\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2)\hat{\rho} + R(\ddot{\theta} + \dot{\theta}^2)\hat{\theta}) = f_{ad\theta}\hat{\theta} + f_{ad\rho}\hat{\rho} + mg(-\cos(\theta)\hat{\rho} + \sin(\theta)\hat{\theta}) \tag{72}$$

Si ahora reemplazamos $\theta = \pi/4$, entonces:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})}{R} \tag{73}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g\sqrt{2}}{4R} \tag{74}$$

Separando entonces por componentes, primero $\hat{\rho}$

$$mg\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - 1\right)) = f_{ad\rho} - mg\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{75}$$

$$\implies f_{ad\rho} = mg(\frac{5\sqrt{2}}{4} - 1) \tag{76}$$

Donde notamos que $f_{ad\rho} > 0$ esto porque debe compensar la fuerza centrípeta que siente.

Ahora en $\hat{\theta}$:

$$mg\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=f_{ad\theta}+mg\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{77}$$

$$\implies f_{ad\theta}=mg(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}) \tag{78}$$

Notamos que $f_{ad\theta}<0$ lo que tiene sentido pues el peso apunta en la direccion positiva en θ, de manera que esta fuerza lo compensa. Si quiero calular el modulo de la fuerza de adherencia lo puedo calcular como:

$$f_{ad}=\sqrt{f_{ad\rho}^2+f_{ad\theta}^2}=mg\sqrt{\frac{25}{4}-4\sqrt{2}} \tag{79}$$

Con lo que se acaba el problema c: