Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta Auxiliar 17

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

8 de noviembre de 2021

P1. El primer problema es un problema muy tipico de potenciales y la idea es seguir reforzando los conceptos. Tenemos dos fuerzas presentes, el peso $(-mg\hat{r})$ y tambien la fuerza de repulsión, $\frac{k}{r^2}\hat{r}$.

a) Primero nos piden la funcion potencial asociada a la fuerza neta que actua sobre el anillo. Para poder responder esta pregunta, tenemos que saber cual es la fuerza neta, o mejor dicho, cual es su definición. La fuerza neta es la suma de todas las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo. En este caso tendremos:

$$F_{neta} = -mg\hat{r} + \frac{k}{r^2}\hat{r}$$

Nos piden el potencial asociado a esta fuerza, recordamos que debe cumplir la relacion $-\nabla V = F$

$$-\nabla V = F_{neta}$$
$$-\nabla V = -mg\,\hat{r} + \frac{k}{r^2}\hat{r}$$
$$\frac{\partial V}{\partial r} = mg - \frac{k}{r^2}$$

Donde en el último paso aprovechamos que la fuerza solo esta en la componente radial y asi el gradiente de V solo tiene componente en $\hat{r}$.

Ahora queremos integrar la ecuacion en r para obtener la expresión del potencial.

$$\int_0^r dV = \int_0^r dr(mg - \frac{k}{r^2})$$
$$V(r) - V(0) = mg\Big|_0^r + \frac{k}{r}\Big|_0^r$$

Notamos que cuando evaluemos el segundo termino de la derecha en 0, tendremos un problema, porque la funcion no es acotada en 0, asi que diremos que el potencial es no acotado en 0, de manera que $V(0)$, es no acoada y se cancela con el termino que diverge. Obteniendo así:

$$V(r) = mgr + \frac{k}{r}$$

El grafico lo haré el fin de semana, igual lo hice en clases jiji.

b) Ahora queremos determinar los puntos de equilibrio y el periodo de pequeñas oscilaciones. Recordando clases anteriores, podemos encontrar puntos de equilibrio de 2 formas, una haciendo que la fuerza neta sea 0, o derivando el potencial e igualandolo a 0, que es equivalente porque acabamos de calcular el potencial integrando la fuerza. Entonces:

$$\begin{aligned} F_{neta} &= 0 \\ -mg + \frac{k}{r^{*2}} &= 0 \\ \frac{k}{mg} &= r^{*2} \\ \sqrt{\frac{k}{mg}} &= r^{*} \end{aligned}$$

Donde tomamos el valor positivo como solución porque la negativa no tiene sentido jeje. Ahora queremos el periodo de pequeñas oscilaciones, para obtenerlo calculamos la segunda derivada del potencial y lo evaluamos en el punto de equilibrio.

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r^*} &= \frac{2k}{r^{*3}} \\ &= \frac{2k}{\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\right)^3} \end{aligned}$$

Ahora para el periodo de pequeas oscilaciones, usamos la formula

$$
\begin{aligned}
w_{po} &= \sqrt{\frac{\left.\dfrac{d^2U}{dr^2}\right|_{r^*}}{m}} \\
&= \sqrt{\frac{2k}{m \cdot \left(\sqrt{\dfrac{k}{mg}}\right)^3}}
\end{aligned}
$$

c) Ahora queremos calcular la altura r_o, sobre el centro de la esfera para que llegue con velocidad nula a la superficie de la esfera. Para resolver este problema como la energía se conserva haremos $E_i = E_f$. Inicialmente no tiene energía cinética y finalmente tampoco, de manera que la condicion se transforma en:

$$
\begin{aligned}
E_i &= E_f \\
V(r_o) &= V(R) \\
mgr_o + \frac{k}{r_o} &= mgR + \frac{k}{R} \\
mgr_o^2 - r_o\left(mgR + \frac{k}{R}\right) + k = 0
\end{aligned}
$$

Donde se puede resolver la ecuación cuadrática y tomamos la solucion con signo +, puesto que la con el signo menos es $r = r_o$.

$$
\begin{aligned}
mg(r_o - R) &= (r_o - R)\frac{k}{r_oR} \\
0 &= (r_o - R)\left(\frac{k}{r_oR} - mg\right) \\
\implies mg &= \frac{k}{r_oR} \\
r_o &= \frac{k}{mgR}
\end{aligned}
$$

Y como tenemos $\dfrac{k}{R^2} > mg$, entonces se cumple que $\dfrac{k}{mgR} > R$ La solución tiene sentido.

P2. Este problema es con una fuerza que es solo la atractiva de un alambre (para pensar). Para la primera parte ocuparemos dinámica, principalmente porque es mas intuitivo y para la parte b y c usaremos energía, este es un problema de Control del profesor y por eso creo que vale la pena mirarlo. La fuerza es:

$$F(\rho) = -k\rho \tag{1}$$

Donde ρ es conocido. Como el primer movimiento es solo en $\hat{\rho}$ solo trabajaremos con esa ecuación de movimiento. Tenemos que

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -k\rho \tag{2}$$

Pero como cae en linea recta $\dot{\theta} = 0$. Asi la ecuación queda mas simple:

$$m\ddot{\rho} = -k\rho \tag{3}$$

Queremos calcular la velocidad con la que llega hasta $\rho_o/2$ asi que usaremos el trucazo de mecánica y luego integraremos. Recordamos $\ddot{\rho} = \dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{d\rho}$

$$\int_0^{\dot{\rho}} \dot{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{d\rho}d\rho = -\frac{k}{m}\int_{\rho_o}^{\rho_o/2} \rho d\rho \tag{4}$$

$$\frac{\dot{\rho}_f^2}{2} = -\frac{k}{m}\left(\frac{\rho_o^2}{8} - \frac{\rho_o^2}{2}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\dot{\rho}_f^2}{2} = \frac{k}{m}\frac{3\rho_o^2}{8} \tag{6}$$

$$\dot{\rho}_f^2 = \frac{3k\rho_o^2}{4} \tag{7}$$

$$\implies v_1 = \rho_o\sqrt{\frac{3k}{4m}} \tag{8}$$

Con lo que obtuvimos la velocidad con la que termina el primer movimiento. Con lo que tambien podemos escribir la magnitud del impulso vertical, pues vale

$$v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}} = \rho_o\sqrt{\frac{k}{m}\frac{1}{2}} \tag{9}$$

Lo siguiente es responder como encontrar la velocidad maxima y la distancia minima.

Para esto es util pensar en términos de Enería, para ello veamos el potencial asociado a la fuerza del problema.

$$F = -\nabla U \tag{10}$$

$$+k\rho = \nabla U = \frac{d}{d\rho}U \tag{11}$$

$$\implies U = \frac{1}{2}k\rho^2 \tag{12}$$

Por lo que mientras mas pequeño sea ρ mas pequeño sera el potencial, tenemos tambien que $E = K + U$ por lo que habrá mas energía cinetica (velocidad) mientras mas cerca del origen estemos. Entonces $\rho_{\min}$ y $v_{\max}$ ocurren simultáneamente. Para encontrarlos usaremos conservación de Energia y conservación de momento angular (o dicho de otro modo, la ausencia de fuerzas en $\hat{\theta}$).Notamos tambien que en $\rho_{\min}$ la velocidad es solo tangencial. La ecuacion en $\hat{\theta}$ es:

$$m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{14}$$

$$\implies \rho^2\dot{\theta} = C \tag{15}$$

$$\rho v_T = C \tag{16}$$

Donde v_T es la velocidad tangencial. Ahora necesitamos encontrar C para lo que usarmos el instante inicial. Podemos hacer esto porque C es lo que se llama una cantidad conservada, lo que significa que para este problema, el producto entre el radio al cuadrado y la veloicdad angular se mantiene constante, entonces si ρ es pequeño, $\dot{\theta}$ debe crecer y viceversa. En mi opinión este tipo de cosas son lo mas lindo de la mecánica. Bueno, inicialmente tenemos que $\rho = \rho_o/2$ y $v_T = v_2$

$$C = \frac{\rho_o}{2}\rho\sqrt{\frac{k}{}}\frac{1}{2} = \frac{\rho_o^2}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{17}$$

Ahora vamos por la conservación de energia

$$E_i = E_f \tag{18}$$

Inicialmente, tenemos la energia cinetica, que tendra un termino de velocidad tangencial mas un termino de velocidad angular. Para el potencial, tendremos al potencial evaluado en $\rho_o/2$. Así

$$E_i = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{\rho_o}{2}\right)^2 \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\frac{3mk}{4m}\rho_o^2 + \frac{mk}{m}\frac{\rho_o^2}{4} + k\frac{\rho_o^2}{4}\right) \tag{20}$$

$$= \frac{1}{2}\rho_o^2 k\frac{5}{4} \tag{21}$$

Por otro lado, la energia final es:

$$E_f = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}k\rho_{\min}^2 \tag{22}$$

Donde usamos que la velocidad es solo tangencial. Tambien a partir de la constante C tenemos que :

$$C = v_{\min}\rho_{\min} \tag{23}$$

$$\frac{\rho_o^2}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} = \rho_{\min}v_{\max} \tag{24}$$

Usando esta ultima ecuacion mas la conservación de energia:

$$\frac{5}{8}k\rho_o^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}k\rho_{\min}^2 \tag{25}$$

Podemos despejar el sistema, ahora es un poco complicado con tantas constantes, la verdad podríamos terminar confundiéndonos, asi que para simplificarnos la vida les propongo adimensionalizar las ecuaciones. Como hacemos eso, bueno la unidad de medida del sistema es ρ_0 para las distancias, ademas como unidad de 1/tiempo tenemos $\sqrt{\frac{k}{m}}$. Entonces si las multiplicamos tenemos velocidad. Asi diremos que

$$\rho_{\min} = a\rho_o \tag{26}$$

$$v_{\max} = b\rho_o\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{27}$$

Con esto nuestro sustema quedara como:

$$\frac{1}{4}\rho_o^2\sqrt{\frac{k}{m}} = a\rho_o b\rho_o\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{28}$$

$$\implies \frac{1}{4} = ab \tag{29}$$

$$\frac{5}{8}k\rho_o^2 = \frac{1}{2}mb^2\rho_o^2\frac{k}{m} + \frac{1}{2}ka^2\rho_o^2 \tag{30}$$

$$\implies \frac{5}{4} = a^2 + b^2 \tag{31}$$

Donde nuestro sistema ahora son las ecuaciones 29 y 31.

Si hacemos 2(29) + (31)

$$\frac{2}{4} + \frac{5}{4} = (a+b)^2 \tag{32}$$

$$\sqrt{\frac{7}{4}} = a + b \tag{33}$$

Y luego $-2^(29) + (31)$

$$-\frac{2}{4} + \frac{5}{4} = (a-b)^2 \tag{34}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = a - b \tag{35}$$

Si ahora sumamos estas dos ecuaciones:

$$\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a \implies a = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4} \tag{36}$$

Y si las restamos

$$\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2b \implies b = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4} \tag{37}$$

Con lo que terminamos el problema pues

$$\rho_{\min} = a\rho_o \tag{38}$$

$$v_{\max} = b\rho_o\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{39}$$