Pauta Auxiliar 14

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

22 de octubre de 2021

P1. *a*) Las fuerzas conservativas del problema son el peso y la fuerza elástica. Por lo que el potencial será la suma de ambas, es decir:

$$U = U_g + U_e \tag{1}$$

Calcularemos primero el potencial gravitatorio, considerando como altura 0 el punto O, tendremos que la altura viene dada por la expresion $h = R\cos\theta$, de manera que el potencial será:

$$U_g(\theta) = -mgR\cos\theta \tag{2}$$

Donde tenemos el signo negativo pues la altura es negativa. Ahora queda calcular el potencial elástico, para lo cual medimos el largo del resorte. Para lo cual podemos utilizar que el largo del resorte va a ser el modulo del vector que va desde la masa hasta el punto P. La posicion de la masa viene dada por:

$$\vec{r}(\theta) = R\sin\theta\hat{\imath} - R\cos\theta\hat{\jmath} \tag{3}$$

La posicion de P, viene dada por:

$$\vec{r}_P = \sqrt{2}R\hat{\imath} \tag{4}$$

. Me interesa calcular $|\vec{r}(\theta) - \vec{r}_p|$

$$\begin{aligned}
|\vec{r}(\theta) - \vec{r}_P| &= \sqrt{(\sqrt{2}R - R\sin\theta)^2 + (-R\cos\theta)^2} && (5)\\
&= \sqrt{2R^2 - 2\sqrt{2}R^2\sin^2\theta + R^2\sin^2\theta + R^2\cos^2\theta} && (6)\\
&= R\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\sin^2\theta} && (7)
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos el largo del resorte, podemos calcular el estiramiento y por lo tanto el potencial elastico como:

$$\begin{aligned}
U_e &= \frac{1}{2}k(|\vec{r}(\theta) - \vec{r}_P| - \alpha R)^2 && (8)\\
&= \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}\sin\theta} - \alpha\right)^2 && (9)
\end{aligned}$$

Asi finalmente, el potencial completo viene dado por:

$$U = \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-\alpha\right)^2 - mgR\cos\theta \tag{10}$$

Con lo que terminamos la parte a).

b) Para la siguiente parte consideramos $\alpha = 1$ y $g = 0$. Por lo que reemplazando tendremos el siguiente potencial:

$$U(\theta) = \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right)^2 \tag{11}$$

Queremos puntos de equilibrio, ie. puntos que cumplan $\frac{dU}{d\theta} = 0$, por lo que derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \implies \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right)^2\right) = 0 \tag{12}$$

$$kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right)\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right) = 0 \tag{13}$$

$$kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right)\frac{-2\sqrt{2}\cos\theta}{2\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}} = 0 \tag{14}$$

Ahora que tenemos una expresion que tenemos que igualar a 0, las posibilidades son que los factores sean 0, ignorando las constantes, tendremos que la condicion $\frac{dU}{d\theta} = 0$, es:

$$\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right)\cos\theta = 0 \tag{15}$$

$$\implies \sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1 = 0 \quad \vee \quad \cos\theta = 0 \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

Ahora buscamos las soluciones para θ.

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta} = 1 \tag{18}$$

$$-2\sqrt{2}\sin\theta = -2 \tag{19}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

$$\implies \theta_1 = \frac{\pi}{4} \vee \theta_2 = \frac{3\pi}{4} \tag{21}$$

Para la segunda condicion tendremos:

$$\cos\theta = 0 \tag{22}$$

$$\implies \theta_3 = \frac{\pi}{2} \vee \theta_4 = \frac{3\pi}{2} \tag{23}$$

Para tener una intuicion de la estabilidad de los puntos, sirve dibujarlos, lo hice en el aux. Me faltan habilidades dibujisticas en LaTeXtodavia :c .

Ahora queremos evaluar la estabilidad de los puntos, para lo cual debemos calcular la segunda derivada de el potencial. Tenemos que si $\frac{d^2U}{d\theta^2}|_{x_{eq}} > 0$, entonces x_{eq} es un punto de equilibrio estable. Por otro lado si $\frac{d^2U}{d\theta^2}|_{x_{eq}} < 0$, entonces x_{eq} es un punto de equilibrio inestable. De la eq (14) tenemos:

$$\frac{dU}{d\theta} = kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}-1\right)\frac{-\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}} \tag{24}$$

$$= kR^2\sqrt{2}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}}-\cos\theta\right) \tag{25}$$

Ahora tenemos que derivar eso, vamos allá:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = kR^2\sqrt{2}\left(\frac{-\sin\theta(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta})+\cos\theta(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}})}{3-2\sqrt{2}\sin\theta}+\sin\theta\right) \tag{26}$$

No es una expresion muy bonita, pero sirve, estudiaremos primero los puntos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$. En ambos $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ASí:

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_{1,2}} = kR^2\sqrt{2}\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}})+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}}\right)}{3-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{27}$$

$$= kR^2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{28}$$

$$= kR^2 > 0 \tag{29}$$

Como la segunda derivada dio positiva, diremos que los puntos de equilibrio son estables. Ahora a calcular para $\theta_{3,4}$, donde $\cos\theta_{3,4} = 0$ para el seno va a depender de si es 3 o 4 pues $\sin\theta_3 = 1$ y $\sin\theta_4 = -1$ Vamos con θ_3 primero:

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_3} = kR^2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{3-2\sqrt{2}}+1\right) < 0 \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

Por lo que ese punto es un equilibrio inestable. Ahora veamos que pasa con θ_4.

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta_4} = kR^2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{3+2\sqrt{2}}-1\right) < 0 \tag{32}$$

Pueden evaluarlo, o ver que es la raiz de un numero (mayor que 1), dividido por el numero, por lo que la fraccion debe ser menor que 1 , de manera que ese numero menor que 1, menos 1, será un numero negativo.

Con lo que mostramos que los angulos $\theta_{3,4}$, son posiciones de equilibrio inestables. Con lo que terminamos esta parte, este problema es laaargo.

1. Ahora tenemos que volver a considerar $g \neq 0$. Y buscaremos una condicion para α para que el punto $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, sea estable. Esto es algo usual en los problemas de fisica, tiene que ver con la idea de tratar alguna variable como un parametro del problema, de forma que separa distintos comportamientos(bifurcacion), en este caso para cierto rango de valores de α tendremos que cierto angulo sera punto de equilibrio estable o inestable. Volvemos entonces al potencial y sus derivadas. Para que sea un punto de equilibrio estable, recordamos tiene que cumplir 2 condiciones:

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0 \wedge \left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\dfrac{\pi}{4}} > 0 \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta} - \alpha\right)^2 - mgR\cos\theta \tag{35}$$

$$\implies \frac{dU}{d\theta} = \frac{1}{2}kR^2\,2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta} - \alpha\right)\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}\right) + mgR\sin\theta \tag{36}$$

$$= kR^2\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}} - 1\right)\cos\theta + mgR\sin\theta \tag{37}$$

Aplicando que la derivada en $\theta = \frac{\pi}{4}$ debe ser 0:

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0 \implies kR^2\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})}} - 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + mgR\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{38}$$

Evaluando $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, así:

$$kR^2\sqrt{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}} - 1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + mgR\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{39}$$

$$kR^2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3-2}} - 1\right) + mgR\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{40}$$

$$kR^2(\alpha - 1) = -\frac{mgR\sqrt{2}}{2} \tag{41}$$

$$\implies \alpha = 1 - \frac{mg\sqrt{2}}{2kR} \tag{42}$$

$$\tag{43}$$

Ahora debemos calcular el signo de la segunda derivada para ver si tiene el signo correcto. Retomando desde la primera derivada, y con el valor de α en mente, derivamos:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = kR^2\sqrt{2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\alpha\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}} - \cos\theta\right) + mgR\frac{d}{d\theta}\sin\theta \tag{44}$$

Ahora vemos que la derivada de el primer termino ya la conocemos, solo hay que multiplicar por α que es una constante para θ.Ver Ec (25). Por lo que:

$$\implies \frac{d^2U}{d\theta^2} = kR^2\sqrt{2}\left(\alpha\left(\frac{-\sin\theta(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}) + \cos\theta(\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta}})}{3-2\sqrt{2}\sin\theta}\right) + \sin\theta\right) + mgR\cos\theta \tag{45}$$

Ahora reemplazamos el angulo $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$= kR^2\sqrt{2}\left(\alpha\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3-2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{3-2}})}{3-2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + mgR\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{46}$$

$$= kR^2 + mgR\frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \tag{47}$$

Por lo que vemos, es estable, asi que ya tenemos el α.

2. Ahora nos piden hacer pequeñas oscilaciones para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Para esto utilizaremos que si llamamos q a la coordenada que parametriz nuestra energia mecanica total. Escrito en ecuacion como:

$$E(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2 + U(q) \tag{48}$$

Entonces la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a un punto de equilibrio estable θ_*, viene dada por:

$$\omega_{p.o.} = \sqrt{\frac{U''(\theta_*)}{\beta}} \tag{49}$$

En nuestro caso, $q = \theta$ y $\dot{q} = \dot{\theta}$. Y la energia mecánica total viene dada por:

$$E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\sin\theta} - \alpha\right)^2 - mgR\cos\theta \tag{50}$$

Identificamos entonces $\beta = mR^2$. En el apartado anterior calculamos

$$U''(\theta_*) = kR^2 + mgR\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{51}$$

Por lo que la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a θ_*.

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{mR^2}\left(kR^2 + mgR\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \tag{52}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g\sqrt{2}}{2R}} \tag{53}$$

Con lo que terminamos la pregunta c: Notamos que si no hubieramos puesto el R^2 la respuesta no nos habria dado en las dimensiones correctas. Por lo que es importante identificar siempre el β para calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones,