Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta Auxiliar 11

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

8 de octubre de 2021

P1. Este es un problema bien canónico de oscilador armónico y servirá para reforzar sus conocimientos. El problema puede ser entendido como un movimiento en el plano dado que la vara no se mueve en $\hat{z}$. Por lo que para describirlo usaremos coordenadas polares. En el problema la única fuerza real presente es la fuerza elástica.

$$\boldsymbol{F}_e = -k(\rho - l_o)\hat{\rho} \tag{1}$$

Donde notamos que si ρ es pequeño, la fuerza apunta hacia afuera pues el resorte esta comprimido. Si por otro lado tenemos ρ grande, entonces la fuerza debe apuntar en $\hat{\rho}$. Es super importante verificar estos límites y lo seguiremos ejercitando con el siguiente problema. En el problema no hay mas fuerzas que afecten la dinámica. Hay una fuerza normal en $\hat{\phi}$ y tambien hay una fuerza normal en $\hat{k}$ pues la partiícula tiene masa. Escribiremos esas ecuaciones y luego revisaremos la relevante. En $\hat{k}$

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= mg - N_k \\ \implies 0 &= mb - N_k \end{aligned}$$

Y para $\hat{\phi}$

$$\begin{aligned} m(\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) &= N_\phi \\ \implies 2m\omega_o\dot{\rho} &= N_\phi \end{aligned}$$

Donde reemplazamos que la velocidad angular es igual a ω_o. El valor para la normal en $\hat{k}$ ya lo tenemos. Para el valor en $\hat{\phi}$ necesitamos primero despejar $\dot{r}$. No se puede resolver desde ahí.

Siguiendo ahora con la ecuación relevante:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -k(\rho - l_o) \tag{2}$$

$$\ddot{\rho} + \rho\left(\frac{k}{m} - \omega_o^2\right) = \frac{kl_o}{m} \tag{3}$$

Donde en el segundo paso reemplazamos el valor de la velocidad angular y tambien reordenamos los terminos de manera que podamos resolver el problema. En la pregunta nos piden una condicion que nos permita estudiar este sistema como un oscilador armónico, esa condición es,

$$\frac{k}{m} - \omega_o^2 > 0$$
$$\sqrt{\frac{k}{m}} > \omega_o$$

Si tuvieramos el otro caso, entonces aparecerían exponenciales y tendríamos que el resorte se estiraria para quedar en una longitud constante, lo que es consistente con que la velocidad angular sea muy alta. Notamos que este resultado es independiente tanto de la velocidad inicial como de la posición inicial.

Siguiendo con el problema, resolvámoslo como un oscilador armíco. Lo primero sera hacer un cambio de variable para eliminar a la constante del lado derecho, basta con hacer

$$\rho = \rho' + \frac{\frac{kl_o}{m}}{\frac{k}{m} - \omega_o^2}$$

Así la EDO para ρ' será.

$$\ddot{\rho}' + \rho'\omega^2 = 0 \tag{4}$$

Donde definimos $\omega^2 = \frac{k}{m} - \omega_o^2$. La solución de esa EDO es conocida:

$$\rho'(t) = A\cos(\omega t + \theta_o)$$

Donde A y θ_o son constantes que dependen de las condiciones iniciales del problema, pero nosotres no conocemos las condiciones iniciales para ρ' las conocemos para ρ. Así que deshacemos el cambio de variable y obtenemos:

$$\rho(t) = A\cos(\omega t + \theta_o) + \frac{kl_o}{k - m\omega_o^2} \tag{5}$$

La velocidad radial entonces es:

$$\dot{\rho}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \theta_o) \tag{6}$$

Las condiciones inicales del problema son, "...se suelta una particula con el resorte en su largo natural.." entonces $\rho(t=0) = l_o$ y $\dot{\rho}(t=0) = 0$ Apliquemoslas:

$$\dot{\rho}(t=0) = 0 \tag{7}$$
$$\implies -A\omega\sin(\theta_o) = 0 \tag{8}$$
$$\implies \theta_o = 0 \tag{9}$$

Tomamos la solución mas simple para la fase θ_o. También se puede tomar π y no hay problema. La condición para la posición nos entrega:

$$\rho(t=0) = l_o \tag{10}$$

$$A\cos(0) + \frac{kl_o}{k - m\omega_o^2} = l_o \tag{11}$$

$$A = \frac{-kl_o + kl_o - l_o m\omega_o^2}{k - m\omega_o^2} \tag{12}$$

$$A = \frac{-l_o m\omega_o^2}{k - m\omega_o^2} \tag{13}$$

Con esto ya podemos escribir $r(t)$

$$\rho(t) = \frac{l_o}{k - m\omega_o^2}\Big(k - m\omega_o^2\cos(\omega t)\Big) \tag{14}$$

Así podemos escribir el itinerario de la parícula:

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{l_o}{k - m\omega_o^2}\Big(k - m\omega_o^2\cos(\omega t)\Big)\,\hat{\rho} + \omega_o t\hat{\phi} + z_o\hat{k} \tag{15}$$

P2. Para este problema buscaremos debido a la relativamente poca cantidad de información entregada, una forma un poco con las manos para tomar el problema, a priori solo conocemos: La compresión del resorte A δ_A , lo estirado que esta el resorte B δ_B, el coeficiente de roce cinético μ, la masa m de la caja, las constantes elásticas k_A y k_B respectivamente. Y nos piden calcular la velocidad máxima que alcanza la masa m. Para resolver este problema utilizaremos dinámica. Por lo que veamos que fuerzas hay presentes, primero en el eje Z

$$F_N = N\hat{k}$$
$$F_m g = -mg\hat{k}$$

Por ecuaciones de Newton

$$\sum F_z = m\ddot{z}$$
$$N - mg = 0$$
$$N = mg$$

Para el eje x tendremos que ir con mas cuidado, porque no conocemos el largo natural. Diremos que la posicion en la que parte será nuestro origen, de esta forma, si nombramos x, como el desplazamiento a la derecha del origen. tendremos

$$F_A = k_A(\delta_A - x)\hat{i}$$
$$F_B = k_A(\delta_B - x)\hat{i}$$

Para entender estas definiciones, sirve visualizar para donde apuntan las fuerzas cuando x es pequeño y cuando es muy grande, para el resorte A, tenemos que esta comprimido, por lo que la fuerza inicialmente apunta hacia la derecha, es decir, en $x = 0$ y x pequeño queremos que apunte en $\hat{\imath}$ puesto que el resorte seguira comprimido,ahora, cuando x es muuuy grande (es una referencia, no necesariamente tiene que pasar), queremos que la fuerza sea en el sentido de $-\hat{\imath}$ y vemos que se cumple. El razonamiento es análogo para B. $x = 0$ y x pequeño, queremos que apunte hacia la derecha porque esta estirado, y para x muy grande queremos que apunte hacia la izquierda.

Tambien tenemos otra fuerza invitada en nuestro problema, el roce

$$\begin{aligned} F_{roce} &= -N\mu\hat{\imath} \\ &= -mg\mu\hat{\imath} \end{aligned}$$

Hay que tener ojo con la dirección en la que apunta el roce. Atención en este punto, nos piden la velocidad máxima que alcanza, (ahora razonaremos con energía para fundamentar los pasos), La velocidad maxima se alcanza cuando la mayor cantidad de energía del sistema es energía cinética. Pero tenemos un problema con roce cinético, esto significa que cada vez que el sistema se desplaza pierde energía, de manera que la velocidad maxima ocurrira cuando los resortes le entreguen la maxima cantidad de energía que puedan, y haya perdido la menor cantidad de energía posible producto del roce. Es por esto que diremos que alcanza una velocidad máxima cuando el roce apunta hacia la izquierda, que viene a ser el primer tramo. De manera que la solución que encontraremos para el problema, solo sirve en el tramo en el que la particula parte desde el reposo en $x = 0$ y llega a un punto donde el resorte B se comprime lo maximo que permita la energia disponible. Para este tramo, el roce apunta hacia la izquiera y es por esto que lo definí así, de esta forma tendremos.

$$\begin{aligned} \sum m\ddot{x} &= \sum F_x \\ m\ddot{x} &= k_A(\delta_A - x) + k_B(\delta_B - x) - mg\mu \\ m\ddot{x} + x(k_A + k_B) &= k_A\delta_A + k_B\delta_B - mg\mu \\ \ddot{x} + x\frac{k_A + k_B}{m} &= \frac{k_A\delta_A + k_B\delta_B - mg\mu}{m} \end{aligned}$$

Tenemos una EDO no homogénea, llamaremos d a todo el lado derecho, y hacemos el cambio de variable. $x = u + \dfrac{md}{k_A + k_B} \implies \ddot{x} = \ddot{u}$ Pueden revisar que ese es el cambio de variables que apaña. Ahora tenemos nuestra bella EDO.

$$\ddot{u} + w_0^2 x = 0$$

Donde llamé a $\dfrac{k_A + k_B}{m}$ como w_0^2

Las soluciones de esta ecuación son:

$$u = A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t)$$
$$x(t) = d + A\cos(w_0 t) + B\sin(w_0 t)$$

Ahora imponemos condiciones Iniciales, primero por donde pusimos el origen $x(0) = 0$ y como nos dicen que parte desde el reposo $\dot{x}(0) = 0$, Así:

$$x(0) = 0 = A + d$$
$$A = -d$$

Para la segunda condición:

$$\dot{x}(0) = 0$$
$$w_0 B = 0$$
$$B = 0$$

Asi tendremos nuestra ecuaciones de movimiento para el primer tramo como:

$$x(t) = d(1 - \cos(w_0 t))$$
$$\dot{x}(t) = w_0 d \sin(w_0 t)$$

Considereando que la velocidad maxima se va a alcanzar antes de que x alcance su maximo, podemos decir que la velocidad maxima será la amplitud de la velocidad. Así:

$$\begin{aligned} v_{max} &= w_0 d \\ &= \sqrt{\frac{k_A + k_B}{m}} \frac{k_A \delta_A + k_B \delta_B - mg\mu}{m} \end{aligned}$$

Eso, hay forma de resolverlo con trabajo y energia tambien pero este método me pareció mas intuitivo.