Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta Auxiliar N

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Javier Huenupi Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

24 de septiembre de 2021

P1. Como dice el enunciado, queremos resolver ecuaciones de la forma

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \tag{1}$$

Con a, b, c constantes. Ya lo primero es decir que esta ecuación es equivalente a

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + c'y = d \tag{2}$$

Donde c' y d tambien son constantes. Esto porque basta con hacer un cambio de variable para obtener la ecuación homogénea. Dicho esto, cuando nos enfrentemos a ecuaciones de este tipo, (siempre aparecen) y puede que b o c sean 0, pero eso no afecta el procedimiento estándar. Puede que lo hayan visto en EDO, el truco que no falla nunca es decir: $y \propto e^{\lambda t}$, la proporcionalidad viene porque deberia haber una constante acompañando, como en una primera instancia nos interesa saber cual es el valor de lambda, no es necesario incluirlas. Tambien podemos decir

$$y = Ae^{\lambda t} \implies \dot{y} = \lambda y \implies \ddot{y} = \lambda^2 y \tag{3}$$

Y con este reemplazo, tendremos que nuestra ecuación se vuelve

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)y = 0 \tag{4}$$

Donde nos aparece la solución trivial $y = 0$. O que el polinomio de la izq sea 0. Nos quedamos con esta segunda opción y obtenemos:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{5}$$

Vamos a comenzar por el caso que ya conocemos, que es el oscilador armonico, en ese caso tenemos $b = 0$ y la frecuencia del oscilador $w^2 = c/a$. Con esta condición la solución es

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{a}{c}} \tag{6}$$

Pero si a y c son mayores a 0 esto es un numero imaginario!!!, sip. Se acaba la clase.

No mentira, en efecto ese es un numero imaginario, podemos escribirlo como

$$\lambda = \pm i\omega \tag{7}$$

Debemos recordar que estabamos diciendo que $y = e^{\lambda t}$. Como en este caso nos quedan dos valores para lambda tenemos. $y_1 = e^{i\omega}$ e $y_2 = e^{-i\omega}$. Recordamos de EDO que si tenemos dos soluciones de una ecuación diferencial, las combinaciones lineales de esta tambien lo son, si tomamos en particular las soluciones y_3 e y_4 definidas como:

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \cos \omega t \tag{8}$$

$$y_4 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \sin \omega t \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Entonces podemos escribir la solución de esta ecuacion como:

$$y_f = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{11}$$

Donde las constantes A y B van a venir dadas por las condiciones iniciales. La lección de esta parte es que cuando el valor de lambda nos de imaginario (o complejo como veremos mas adelante) las soluciones van a tener una componente oscilatoria. Es probable que esto lo estén viendo en EDO y suele ser asi la verdad, la mecánica es en gran parte resolver ecuaciones diferenciales por lo que era un problema inevitable. Ultima cosa, esta ultima solucion tambien se puede escribir como

$$y_{f2} = A \cos(\omega t + \phi) \tag{12}$$

Con A y ϕ constantes, lo importante es que como es una ecuacion diferencial de segundo orden, SIEMPRE vamos a necesitar dos condiciones iniciales para las DOS constantes que nos quedaran a determinar.

Vamos al siguiente caso, para esto nos concentraremos en que todas las constantes sean distintas de 0 y ademas que $b^2 - 4ac > 0$. De esa forma, los valores de lambda serán dos numeros reales.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{13}$$

En este caso las soluciones seran $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ Estas soluciones son de un oscilador amortiguado. La solución final se vera:

$$y_f = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{14}$$

El tercer caso que veremos es $b \neq 0$ y ademas, $b^2 - 4ac < 0$ en este caso, los lambdas seran complejos, tenemos que

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{15}$$

En este caso, tambien podemos mezclar las soluciones porque tendremos que son :

$$y_1 = e^{-bt/2a}e^{i\sqrt{4ac-b^2}/2a} = e^{-\nu t}e^{i\omega_o t} \tag{16}$$
$$y_2 = e^{-bt/2a}e^{-i\sqrt{4ac-b^2}/2a} = e^{-\nu t}e^{-i\omega_o t} \tag{17}$$

En este caso la solución mas general se vera como:

$$y_f = e^{-\nu t}(A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t) \tag{18}$$

Con esto nos queda el ultimo caso que es en realidad un caso particular del amortiguado, que ocurre cuando $b^2 - 4ac = 0$. En ese caso las dos soluciones serían iguales, pero como es una EDO de segundo orden eso no lo podemos permitir y se soluciona fácil, solo tenemos que buscar una función ortogonal a la solución que ya tenemos. Bueno eso haríamos si no supieramos la respuesta. La solucion general es:

$$y_f = (A + Bt)e^{-bt/2a} \tag{19}$$

Bueno esos creo que son todos los casos posibles, les recomiendo guardar esta pauta porque mas adelante definitivamente nos será útil.

P2. Este problema lo resolveremos con dinámica, lo primero sera notar que el angulo que hacen los resortes con la vertical es el mismo y lo llamaremos θ. De manera intuitiva, podemos notar que l punto de equilibrio debe estar lejos de $x = 0$ La fuerza del resorte de arriba, en el eje x será:

$$F_1 = -2k(\sqrt{x^2 + d^2} - 3d)\sin\theta \tag{20}$$

Para el resorte de abajo tenemos:

$$F_2 = -k(\sqrt{x^2 + d^2} - 2d)\sin\theta \tag{21}$$

Notamos que el signo esta correcto pues cerca de 0 ambas fuerzas elásticas apuntan hacia la derecha y muy lejos ambas apuntan hacia la izquierda. Nosotrxs estamos buscando una zona donde una de las 2 (F_1) apunte hacia la derecha y la otra (F_2) apunte hacia la izquierda.

Para encontrar el punto de equilibrio, primero escribimos la ecuacion de movimiento en el eje x

$$m\ddot{x} = F_1 + F_2 \tag{22}$$

La condición de equilibrio es $\ddot{x} = 0$, así

$$F_1 = -F_2 \tag{23}$$
$$-2k(\sqrt{x^2 + d^2} - 3d)\sin\theta = -k(\sqrt{x^2 + d^2} - 2d)\sin\theta \tag{24}$$
$$3\sqrt{x^2 + d^2} = 2d + 6d \tag{25}$$
$$x^2 + d^2 = 64d^2/9 \tag{26}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{55}}{3}d \tag{27}$$

Notamos que hay dos soluciones, esto es porque el problema es simetrico ante la transformacion $x' \to -x$

Ahora que tenemos el punto de equilibrio, avanzamos a encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones, para esto queremos basicamente armarnos un oscilador armónico. Comenzamos escribiendo la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = (-2k(\sqrt{x^2 + d^2} - 3d) - k(\sqrt{x^2 + d^2} - 2d))\sin\theta \tag{28}$$

Queremos obtener una edo mas simplificada, para eso vamos a tener que hacer una expansión de taylor a primer orden.

$$f(x_{eq} + \epsilon) = f(x)\bigg|_{x_{eq}} + \epsilon f'(x)\bigg|_{x_{eq}} \tag{29}$$

Donde $\epsilon \ll 1$ Para poder aplicar el taylor primero debemos hacer un cambio de variable $x = \dfrac{\sqrt{55}d}{3} + \epsilon \implies \ddot{x} = \ddot{\epsilon}$ y bautizaremos $x_{eq} \equiv \dfrac{\sqrt{55}d}{3}$

Asi la ecuación de movimiento que obtendremos es :

$$m\ddot{\epsilon} = (-2k(\sqrt{(x_{eq} + \epsilon)^2 + d^2} - 3d) - k(\sqrt{(x_{eq} + \epsilon)^2 + d^2} - 2d))\sin(\theta) \tag{30}$$

Con esta nueva ecuación tenemos 3 funciones a las cuales hacer taylor

$$f_1(x_{eq}+\epsilon) = \sqrt{(x_{eq}+\epsilon)^2+d^2} - 3d \tag{31}$$

$$f_2 = \sqrt{(x_{eq}+\epsilon)^2+d^2} - 2d \tag{32}$$

$$f_3(x_{eq}+\epsilon) = \sin(\theta) \tag{33}$$

Exacto, tal cual como estas pensando en este momento, tambien tenemos que hacer un taylor a ese seno, pues el angulo θ tambien es función de x y necesitamos que la ecuación solo dependa de una variable. Así, usando la definición de Taylor tenemos:

$$f_1(x_{eq}+\epsilon) = (\sqrt{x_{eq}^2+d^2} - 3d) + \epsilon\frac{2x_{eq}}{2\sqrt{x_{eq}^2+d^2}} \tag{34}$$

$$= \alpha + \epsilon\beta \tag{35}$$

$$f_2(x_{eq}+\epsilon) = (\sqrt{x_{eq}^2+d^2} - 2d) + \epsilon\frac{2x_{eq}}{2\sqrt{x_{eq}^2+d^2}} \tag{36}$$

$$= \gamma + \epsilon\beta \tag{37}$$

Para el seno de theta usaremos, $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}$ así.

$$f_3(x_{eq}+\epsilon) = \frac{x_{eq}}{\sqrt{x_{eq}^2+d^2}} + \epsilon\left(\frac{\sqrt{x_{eq}^2+d^2} - \dfrac{x_{eq}2x_{eq}}{2\sqrt{x_{eq}^2+d^2}}}{x_{eq}^2+d^2}\right) \tag{38}$$

$$= \beta + \epsilon\left(\frac{x_{eq}^2+d^2-x_{eq}^2}{(x_{eq}^2+d^2)^{3/2}}\right) \tag{39}$$

$$= \beta + \epsilon\lambda \tag{40}$$

Ahora nos queda llegar a la ecuación de movimiento y obtener nuestra bonita y simple (no, no es bonita ni simple) expresión para la frecuencia de prequeñas oscilaciones.

$$m\ddot{\epsilon} = (-2k(\alpha+\epsilon\beta) - k(\gamma+\epsilon\beta))(\beta+\epsilon\lambda) \tag{41}$$

$$m\ddot{\epsilon} = (-2k\alpha - k\gamma)\beta - 2k\epsilon\beta^2 - 2k\alpha\lambda\epsilon - k\gamma\lambda\epsilon - k\beta^2\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{42}$$

Donde el primer termino vale 0, pues si lo desarman veran que es la condicion de equilibrio inicial, (el termino constante en estos problemas SIEMPRE se va en el punto de equilibrio) y los terminos cuadráticos no nos interesan porque queremos llegar a un oscilador armónico, y los terminos cuadráticos se pueden despreciar cuando hacemos un analisis de estabilidad pues sus contribuciones son pequeñas. Así

$$m\ddot{\epsilon} + \epsilon k(3\beta^2 + 2\alpha\lambda + \gamma\lambda) = 0 \tag{43}$$

Donde la constante que acompaña a ϵ es positiva pues es la suma de constantes positivas. Entonces la ecuación que obtuvimos es nuestro bello oscilador armonico, que no sda una frecuencia angular de oscilación igual a :

$$\omega = \sqrt{\frac{k(3\beta^2 + 2\alpha\lambda + \gamma\lambda)}{m}} \tag{44}$$

P3. Este es un problema muy clásico de roce viscoso, mas aún veremos diferencias entre dos tipos de roce viscoso. Conceptualmente tenemos que entender que el roce viscoso, a diferencia del estático o el cinético, no depende de la Normal sino que de la velocidad a la que se mueve el objeto afectado. Antes de empezar a resolver el problema haremos ciertas anotaciones respecto a este tipo de roce, $\vec{F_r} = -\gamma\vec{v}$.

Cuando nosotros hagamos Newton a un sistema y haya que considerar la fuerza de roce, es importante notar que la fuerza viene de por si con su signo y cambia automáticamente cuando el objeto cambia de dirección. Esto porque en su definición, el roce viscoso apunta en dirección contraria a la velocidad. Es el tipo de fuerza en la que uno toma su definicion, y la ubica en la ecuacion $\vec{F} = m\vec{a}$, en el lado de las fuerzas, bueno, esa es la introducción, ahora procedamos a resolver el problema.

Tenemos una particula que se mueve con velocidad inicial v_o, que no cambia en el tiempo porque no hay razones para que lo haga, una vez que entra en el medio gaseoso, empieza a afectarlo una fuerza de roce viscoso. $\vec{F} = -\gamma v^n\hat{\imath}$, en este caso, la velocidad esta solo en el eje x, y por lo tanto el roce viscoso apunta en la direccion negativa en el eje x. En el problema nos piden comparar los casos $n = 1$ y $n = 2$ y ver que ocurre con la particula en el tiempo.

Caso $n = 1$:

Para este problema utilizaremos coordenadas cartesianas porque el movimiento ocurre en una dimension y mas particularmente en una línea recta. Identificamos las fuerzas presentes, Tendremos el peso $F_g = -mg\hat{\jmath}$ y una fuerza normal $F_n = N\hat{\jmath}$, en el eje x, tendremos la fuerza de roce viscoso $F_r = -\gamma v\hat{\imath}$. No veo que hayan mas fuerzas presentes, tambien podemos notar que al aplicar la segunda ley de Newton en el eje y:

$$m\ddot{y} = \sum F_y \tag{45}$$

$$m\ddot{y} = N - mg \tag{46}$$

$$N = mg \tag{47}$$

Como la particula no se mueve en el eje y, tenemos que $\ddot{y} = 0$, de esta forma obtenemos que la normal es igual a mg, esto, no sirve para nada en el problema, y eso esta bien, el profesor gusta de poner gravedad en problemas donde no se utiliza luego en los calculos, no se distraigan, y si lo hacen, no se frustren, no siempre será necesaria c:.

Ahora poniéndonos serios, hagamos la suma de fuerzas en el eje x

$$m\ddot{x} = \sum F_x \tag{48}$$
$$m\ddot{x} = -\gamma v_x \tag{49}$$
$$m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} \tag{50}$$
$$\tag{51}$$

Ahora tenemos una EDO que podemos resolver para $\dot{x}$

$$m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} \tag{52}$$
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x} \tag{53}$$
$$\int_{v_o}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{\gamma}{m}\int_{t_o}^{t} dt \tag{54}$$
$$\ln\frac{\dot{x}}{v_o} = -\frac{\gamma}{m}(t - t_o) \tag{55}$$
$$\frac{\dot{x}}{v_o} = e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{56}$$
$$\dot{x}(t) = v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{57}$$
$$\tag{58}$$

Con esto tenemos una expresión para la velocidad en función del tiempo para el caso $n = 1$, notamos que cuando $t \to \infty \implies \dot{x} \to 0$. Con esto sabemos que al menos en el infinito, la partícula va a dejar de avanzar, pero eso queda lejos y a mi me gustaria saber concretamente hasta donde avanza, de manera que a partir de la ecuacion obtenida, calcularemos su posición.

$$\dot{x} = v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{59}$$
$$\frac{dx}{dt} = v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \int_0^x dx = v_o \int_{t_o}^{t} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{60}$$
$$x(t) = v_o\frac{m}{\gamma}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)}) \tag{61}$$

Ahora podemos ver que cuando $t \to \infty \implies x \to \dfrac{v_o m}{\gamma}$ (En este problema asumimos que el gas comienza en $x = 0$, y que la particula pasa por ahi en $t = t_o$) De manera que vemos que la distancia que puede avanzar la particula frente a este tipo de roce viscoso esta acotada.

Caso $n = 2$:

Para este caso no haremos la suma en el eje y, es igual de inútil que en el caso anterior, partimos de inmediato con la segunda ley de Newton en el eje x.

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^2 \tag{62}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x}^2 \tag{63}$$

$$\int_{v_o}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{\gamma}{m}\int_{o}^{t} dt \tag{64}$$

$$\frac{1}{v_o} - \frac{1}{\dot{x}} = -\frac{\gamma}{m}t \tag{65}$$

$$\frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t \tag{66}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \tag{67}$$

Ahora vemos que nuevamente cuando $t \to \infty \implies \dot{x} \to 0$ Veremos que pasa con la posición.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \tag{68}$$

$$\int_{0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \tag{69}$$

$$x(t) = \frac{m}{\gamma}(\ln\left(\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t\right) - \ln\frac{1}{v_o}) \tag{70}$$

Notamos que ahora cuando $t \to \infty \implies x \to \infty$ Es decir, la particula no deja de avanzar.