Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Mecánica

Pauta Auxiliar 6

Autorx: Mau Rojas

3 de septiembre de 2021

P1. Lo primero para resolver este problema, será el decidir donde poner el orgien, el lugar mas intuitivo va a ser en el punto medio entre A y B. Que corresponde a el centro del círculo que se generaría completando el semicírculo. Dado que tenemos que el movimiento ocurre en un plano. Usaremos coordenadas polares, (si consideramos el eje $\hat{k}$ tendremos coordenadas cilíndricas. El movimiento ocurre con $\rho = R$ constante. Por lo que podemos escribir la posición, velocidad y aceleración como:

$$\vec{r}(t) = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \tag{1}$$
$$= R\hat{\rho} + z\hat{k} \tag{2}$$

Para la velocidad, podemos derivar esa expresión, o partir de la definición en cilíndricas.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \tag{3}$$
$$= R\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{4}$$

Tenemos que solo hay velocidad en $\hat{\theta}$, lo que tiene sentido, dijimos que $\dot{z} = 0$ pues no hay movimiento en ese eje.

Finalmente la aceleración será:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} \tag{5}$$
$$= -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} \tag{6}$$

Reitero que ustedes también pueden simplemente derivar la expresión y no utilizar las formulas, es mas intuititvo incluso. Ahora que tenemos la aceleración, tenemos que analizar cuales fuerzas hay presentes. Identificamos primero la fuerza de roce, que se opone al movimiento, como el movimiento ocurre en $\hat{\theta}$, el roce va a estar en la dirección $-\hat{\theta}$ y su magnitud es $f_{roce} = -\mu N\hat{\theta}$. Pero, ¿Cuál normal es esa?.

Dado que el roce lo genera la pared y no el suelo, será la normal de la pared. Es por esto que usamos coordenadas cilíndricas/polares. El vector normal a la pared será $\vec{N}_{pared} = -N\hat{r}$. También tendremos una normal generada por el suelo porque la masa tiene peso, que será

$\vec{N}_k = N_k\hat{k}$, tiene dirección positiva porque consideraremos $\vec{g} = -g\hat{k}$ No identificamos mas fuerzas en el problema, seguimos con la siguiente parte, utilizar la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{7}$$

$$-N_{pared}\hat{\rho} - N\mu\hat{\theta} + (N - mg)\hat{k} = m(R\ddot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\hat{\rho}) \tag{8}$$

Donde tenemos que un vector es igual a otro, dado que los ejes son ortogonales, podemos separar esa ecuación, en 3 ecuaciones, una por cada componente. Obteniendo

$$-N_{pared} = -mR\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

$$-N_{pared}\mu = mR\ddot{\theta} \tag{10}$$

$$N - mg = 0 \tag{11}$$

La ecuación (11), nos entrega el tpíco resultado de $N = mg$ y no aporta información respecto a la dinámica, esto porque el movimiento ocurre en el plano XY.
De la ecuación (9) , tenemos una expresión para la normal de la pared, la podemos reemplazar en (10), obteniendo:

$$mR\ddot{\theta} = -mR\mu\dot{\theta}^2 \tag{12}$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\mu\dot{\theta}^2 \tag{13}$$

Para pasar de (12) a (13) utilizamos el truco de mecánica. Ahora dividimos por $\dot{\theta}^2$, que sabemos es dintinto de 0, porque si lo fuera no habría dinámica. Obtenemos

$$\int_{\dot{\theta}_o}^{\dot{\theta}} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\int_0^{\theta} \mu d\theta \tag{14}$$

$$\ln\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_o}\right) = -\mu(\theta - 0) \tag{15}$$

Dado que nos piden la velocidad con la que llega al final de la pared, queremos despejar $\dot{\theta}$, pues sabemos que $\dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}$

Por otro lado, nos dimos una variable $\dot{\theta}_o$, que es la velocidad angular cuando el ángulo $\theta = 0$, Sabemos que su velocidad en ese punto es v_o, por lo que $v_o = R\dot{\theta}_o \implies \dot{\theta}_o = \frac{v_o}{R}$, reemplazando esta información en (15), Tenemos:

$$\ln\left(\frac{R\dot{\theta}}{v_o}\right) = -\mu\theta \tag{16}$$

$$\frac{R\dot{\theta}}{v_o} = e^{-\mu\theta} \tag{17}$$

$$R\dot{\theta} = v_o e^{-\mu\theta} \tag{18}$$

Si ahora evaluamos en $\theta = \pi$, tendremos la velocidad cuando llega al punto B

$$v_B = v_o e^{-\mu\pi} \tag{19}$$

Con lo que tenemos lista la parte a). En la parte b), nos piden calcular el tiempo que tarda, por lo que volveremos a la ecuación (18) e integraremos en el tiempo.

$$R\frac{d\theta}{dt} = v_o e^{-\mu\theta} \tag{20}$$

$$\frac{R}{v_o}e^{\mu\theta}\frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{21}$$

$$\frac{R}{v_o}\int_0^\theta e^{\mu\theta} = \int\limits_0^t dt \tag{22}$$

$$\frac{R}{v_o}\left(\frac{e^{\mu\theta}}{\mu} - \frac{1}{\mu}\right) = t - 0 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Ahora tenemos una ecuación que nos dice el tiempo, a partir desde que pasa por el punto A, hasta que ha avanzado un ángulo θ. Como nos piden cuanto tarda en llegar al punto B, reemplazamos $\theta = \pi$ Así:

$$t_B = \frac{R}{v_o\mu}(e^{\mu\pi} - 1) \tag{25}$$

Con lo que encontramos el tiempo que tarda y con eso se acaba el problema c:

P2. En este problema veremos una fuerza un poco distinta, esto debido a que hable muy mal de las coordenadas cartesianas diciendo que las cilíndricas eran mejores porque las cosas no giraban, bueno esta fuerza hace que las cosas giren. Usaremos coordenadas cartesianas. Y la única fuerza presente será $\vec{F} = B_o\hat{k} \times \vec{v}$, con $\vec{v}$ la velocidad de la partícula y B_o una constante. Diremos que la partícula parte desde el punto $\vec{r_o} = x_o\hat{\imath} + y_o\hat{\jmath}$, con velocidad inicial $\vec{v_o}$, a priori en cualquier dirección.

Bueno, esa es como una transcripción del enunciado, pero mas larga. Pongámonos a la obra:

Como trabajaremos con cartesianas: $\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath}`\dot{z}\hat{k}$ Esa es la velocidad mas arbitraria posible. de esta forma, la fuerza F sería.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= B_o\hat{k} \times \vec{v} \\ &= B_o\hat{k} \times (\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}) \\ &= B_o\dot{x}\hat{\jmath} - B_o\dot{y}\hat{\imath}\end{aligned}$$

Ahora que sabemos como escribir la fuerza, podemos escribir las ecuaciones de Newton

$$
\begin{aligned}
m\vec{a} &= \vec{F} \\
m\ddot{x} &= -B_o\dot{y} \\
m\ddot{y} &= B_o\dot{x}
\end{aligned}
$$

Ahora tenemos estas últimas dos ecuaciones que se ven muy interesantes, la idea es poder desacoplar el sistema, para eso multiplicaremos la ecuación para el eje x por $\dot{x}$ y la ecuación para el eje y por $\dot{y}$, cuando digo, eje x o eje y me refiero a la que tiene la aceleración en ese eje. Si luego las sumamos obtenemos.

$$
m\ddot{y}\dot{y} + m\ddot{x}\dot{x} = 0
$$

Esta relación la podemos trabajar un poco mas, si probamos escribirla como una derivada temporal, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{2}\frac{d(\dot{y}^2)}{dt} + \frac{m}{2}\frac{d(\dot{x}^2)}{dt} &= 0 \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Que es la energia cinética !!!!!!!!!!! Yo lo encuentro muy interesante en verdad jaja. Tenemos entonces que existe una cantidad conservada que llamaré E.

$$
\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} = E
$$

Ahora queremos encontrar la ecuación de movimiento y ahora tenemos una igualdad de la que podemos despejar v_x o v_y. Yo despejaré v_x.

$$
\begin{aligned}
\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} &= E \\
\dot{x} &= \left(\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora que tenemos una expresión para $\dot{x}$, lo podemos reemplzar en la ecuación de movimiento para el eje y.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} &= B_o\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2} \\
\frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{B_o}{m}\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2} \\
\int\limits_{v_{oy}}^{\dot{y}} \frac{d\dot{y}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \dot{y}^2}} &= \frac{B_o}{m}\int\limits_0^t dt \\
\arcsin\frac{\dot{y}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} - \arcsin\frac{v_{oy}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} &= \frac{B_o}{m}t \\
\frac{\dot{y}\sqrt{m}}{\sqrt{2E}} &= sin\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right) \\
\dot{y} &= \sqrt{\frac{2E}{m}} sin\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right)
\end{aligned}
$$

Con este resultado y la expresión para la energía podemos despejar $\dot{x}$, y obtendremos (no lo haré.)

$$
\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right)
$$

Ahora quiero resolver la ecuación para $\dot{y}$,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \sqrt{\frac{2E}{m}} sin\left(\frac{B_o}{m}t + \phi\right) \\
\int\limits_{y_o}^{y} dy &= \sqrt{\frac{2E}{m}}\int\limits_0^t \sin\frac{B_o}{m}t + \phi \\
y - y_o &= \sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{m}{B_o}(\cos\phi - \cos\frac{B_o}{m}t + \phi)
\end{aligned}
$$

Con esto faltaría hacer el mismo proceso (equivalente) para la ecuación en x, y obtendríamos un seno. Entonces el movimiento es en un círculo !!. :o