

## Pauta Auxiliar 4

Mauricio Rojas

27 de agosto de 2021

P1. Si usamos coordenadas intrínsecas, de la definición de  $\vec{a}_t$  y  $\vec{a}_n$  podemos obtener informacion puesto que son iguales, entonces  $||\vec{a}_t|| = ||\vec{a}_n|| \Leftrightarrow ||\dot{\vec{s}}\hat{t}|| = \left\| \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{n} \right\| \Leftrightarrow \ddot{s} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$

Consideremos  $\dot{s} = \dot{s}(s)$ , de esta forma, usando regla de la cadena (o ni-quita-ni-pone si lo prefiere)

$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\dot{s}}{ds}$ , luego  $\dot{s} \frac{d\dot{s}}{ds} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$ , esto por la igualdad obtenida anteriormente, si ahora asumimos  $\dot{s} \neq 0$  (lo que tiene sentido porque sino, el problema ya estaría solucionado)

$\Rightarrow \frac{d\dot{s}}{ds} = \frac{\dot{s}}{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\dot{s}}{\dot{s}} = \frac{1}{\rho} ds$ , (si, acabo de multiplicar por los diferenciales, si esta idea te incomoda, (no hay razon, la matemática esta a salvo), puedes integrar la igualdad anterior con  $\int ds$ , asi se cancela un  $ds$  con el otro y obtienes lo mismo que yo integrando la ultima igualdad). Ahora integramos nuestra ec. con diferenciales multiplicados y obtenemos (considerando  $\rho = R = cte$  :

$\int_{\dot{s}(0)}^{\dot{s}(s)} \frac{d\dot{s}}{\dot{s}} ds = \frac{1}{R} \int_0^s ds \Leftrightarrow \ln|\dot{s}| \Big|_{\dot{s}(0)}^{\dot{s}(s)} = \frac{1}{R} s$ , pero sabemos que  $\dot{s}(0) = v(0) = v_0$  y que  $\dot{s}(s) = v(s)$ , entonces :

$$\ln \left| \frac{v(s)}{v_0} \right| = \frac{1}{R} s \Rightarrow v(s) = v_0 \exp^{\frac{1}{R}s}$$

Ahora que tenemos  $v(s)$ , calcularemos  $v(t)$  (la entretencion no acaba :P), para esto consideraremos  $\dot{s} = \dot{s}(t)$ :

como  $\ddot{s} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$ , donde usamos que la segunda derivada temporal es la primera derivada, derivada en el tiempo. Si ahora multiplicamos por los diferenciales (hay que acostumbrarse) y acomodamos los terminos obtenemos:

$$\frac{d\dot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{dt}{R}; (\rho = R) \Rightarrow \int_{\dot{s}(0)}^{\dot{s}(t)} \frac{d\dot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{1}{R} \int_0^t dt, \text{ como } \dot{s}(0) = v(0) = v_0 \wedge \dot{s}(t) = v(t), \text{ tenemos:}$$

---


$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{R}t \Leftrightarrow v(t) = \frac{Rv_0}{R - v_0 t}$$

Finalmente, ¿Cuál es el modulo de la aceleración? (¿ $||\vec{a}||$ ?) Como aparece en el resumen:  
 $||\vec{a}|| = \sqrt{||\vec{a}_n||^2 + ||\vec{a}_t||^2}$ , como en este caso la aceleración normal y la tangencial son iguales en modulo, podemos escribirlo como  $\sqrt{2}||\vec{a}_t|| = \sqrt{2}||\vec{a}_n||$ , como  $a_t = \dot{v} = \ddot{s} \wedge a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}$   
 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||\vec{a}(t)|| &= \sqrt{2} ||\vec{a}_n(t)|| = \sqrt{2} \frac{v^2(t)}{R} \\ &= \sqrt{2} ||\vec{a}_t(t)|| = \sqrt{2} \dot{v}^2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\vec{a}(s)|| &= \sqrt{2} ||\vec{a}_n(s)|| = \sqrt{2} \frac{\dot{s}^2(t)}{R} \\ &= \sqrt{2} ||\vec{a}_t(s)|| = \sqrt{2} \dot{s}^2(t) \end{aligned}$$

Si reemplazamos los valores obtenidos anteriormente podemos obtener una expresion explícita de  $\vec{a}(s)$

---

P2. Tenemos que la partícula se ve obligada a moverse en una curva, la que viene parametrizada, en coordenadas cilíndricas, como  $\rho = R$ , constante, y  $z = a\phi$ . También sabemos que su velocidad en el eje  $z$  es  $v_z = \dot{z} = e^{-bt}$  y que en  $t = 0$ , la partícula está en  $z = 0$ . Entonces, la partícula subirá en una espiral, subiendo cada vez más a medida que aumenta el ángulo. Por lo que nos queda preguntar, ¿avanzará indefinidamente?, o en algún punto se detendrá?. Podemos resolver ese problema:

Sabemos que en coordenadas cilíndricas la posición y la velocidad se escriben como:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \rho \hat{\rho} + z \hat{k} \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi} + \dot{z} \hat{k}\end{aligned}$$

Nosotros sabemos que  $\rho = R = \text{cte.}$ , por lo que  $\dot{\rho} = 0$  (notemos que si bien  $\rho$  es constante, cambia a medida que la partícula gira), también tenemos una expresión para  $\dot{z} = e^{-bt}$  y finalmente, también tenemos una expresión para  $z$  que debe cumplirse para que se mueva por la curva  $z = a\phi$ , si reemplazamos esta info, tendremos más claridad respecto a lo que debemos hacer:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R \hat{\rho} + a\phi \hat{k} \\ \dot{\vec{r}}(t) &= R \dot{\phi} \hat{\phi} + e^{-bt} \hat{k}\end{aligned}$$

Si tomamos la expresión para la velocidad en  $z$  y la integramos, debemos llegar a la posición en  $z$ , que sabemos es  $a\phi$ , entonces:

$$\begin{aligned}e^{-bt} &= \dot{z} \\ \int_0^t e^{-bt} dt &= \int_0^t \frac{dz}{dt} dt \\ \int_0^t e^{-bt} dt &= \int_0^t dz \\ \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) &= z \\ \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) &= a\phi \\ \frac{1}{ab} (1 - e^{-bt}) &= \phi(t)\end{aligned}$$

---

Si derivamos esta expresión tendremos  $\dot{\phi}$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{ab} (1 - e^{-bt}) \\ \dot{\phi}(t) &= \frac{e^{-bt}}{a}\end{aligned}$$

Por lo que ahora si podemos escribir una expresion para la velocidad en funcion del tiempo:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{R}{a} e^{-bt} \hat{\rho} + e^{-bt} \hat{k}$$

Ahora queremos la aceleracion, que tipicamente se escribe así:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

Reemplazando por lo que ya conocemos:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{R}{a^2} e^{-2bt} \hat{\rho} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

Para calcula  $\ddot{z}$  derivamos la velocidad en z:

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= \frac{d}{dt}(\dot{z}) \\ &= \frac{d}{dt}(e^{-bt}) \\ &= -be^{-bt}\end{aligned}$$

Lo mismo para  $\ddot{\phi}$

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \frac{d}{dt}(\dot{\phi}) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-bt}}{a}\right) \\ &= -\frac{b}{a}e^{-bt}\end{aligned}$$

---

Asi podemos escribir la aceleración como:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\frac{R}{a^2} e^{-2bt} \hat{\rho} + \frac{Rb}{a} e^{-bt} \hat{\phi} - b e^{-bt} \hat{k}$$

Bueno, ahora nos piden  $\vec{r}(t)$ , pero ya lo calculamos, filo, lo reescribire y comenzaremos el otro analisis c:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R\hat{\rho} + a\phi\hat{k} \\ \vec{r}(t) &= R\hat{\rho} + \frac{(1 - e^{-bt})}{b}\hat{k}\end{aligned}$$

Notamos que en el timite cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow \frac{1}{b}$ , y como sabemos de antes  $z = a\phi$ , de manera que cuando haya pasado muucho tiempo, tendremos

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{b} \\ a\phi &= \frac{1}{b} \\ \phi &= \frac{1}{ab}\end{aligned}$$

Si divido por  $2\pi$  el resultado tendremos el numero de vueltas

$$N_{vueltas} = \frac{1}{2\pi ab}$$

Si analizamos la velocidad en z, vemos que esta va decayendo mas rapido mientras mas grande sea b, por lo que podemos reconocerlo como un roce que hace que la velocidad decaiga.

P3. Este problema esta en coordenadas esféricas, donde la base que tenemos es

$$(r, \theta, \phi) \Rightarrow \vec{r} = r\hat{r} \quad (1)$$

Como la hormiga se mueve sobre el cascarón de radio constante  $r = R = \text{cte.} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

Respecto a las otras coordenadas, tenemos que  $\theta = \phi \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\phi} \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\phi}$  Además nos mencionan que la rapidez de la partícula se mantiene constante e igual a  $v_o$  ie.  $||\vec{v}|| = v_o$ .

La expresión general para la velocidad en coordenadas esféricas es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin(\theta)\dot{\phi}\hat{\phi} \quad (2)$$

$$\theta = \phi \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin(\theta)\dot{\theta}\hat{\phi} \quad (3)$$

Los problemas de mecánica estaran siempre divididos en una parte de planteamiento + comprensión y una parte de matraca. Es importante tener en cuenta que la información que nos entrega el enunciado nos puede dar un punto de partida para el problema y también entregarnos ciertas relaciones útiles. Por ejemplo el enunciado nos dice que la rapidez es constante, usando esto obtenemos:

$$||\vec{v}||^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^2\sin^2(\theta) \quad (4)$$

$$v_o^2 = R^2\dot{\theta}^2(1 + \sin^2(\theta)) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v_o^2}{R^2(1 + \sin^2(\theta))} \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_o}{R} (1 + \sin^2(\theta))^{-1/2} \quad (7)$$

Hasta acá tenemos listo el calculo de  $\dot{\theta}(\theta)$

Recordando ahora que  $\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\dot{\theta} \quad (8)$$

$$= \frac{v_o}{R} \left( \frac{1}{2} \right) (1 + \sin^2(\theta))^{-3/2} 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta} \quad (9)$$

$$= -\frac{v_o}{R} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^{3/2}} \dot{\theta} \quad (10)$$

$$\ddot{\theta}(\theta) = -\frac{v_o^2}{R^2} \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^2} \quad (11)$$

Ahora queremos ver las componentes azimutal ( $\hat{\theta}$ ) y la componente senital ( $\hat{\phi}$ ) La expresión para la aceleracion en esfericas es un poco extensa:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta))\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{\theta} \quad (12)$$

$$+ (r\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta))\hat{\phi} \quad (13)$$

$$= (-r\dot{\theta}^2 - r\dot{\theta}^2\sin^2(\theta))\hat{r} + (r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{\theta} + (r\ddot{\theta}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}^2\cos(\theta))\hat{\phi} \quad (14)$$

El primer termino es la acelración radial. No nos interesa para este problema, pero aprovechamos la oportunidad para reemplazar las condiciones en todos los ejes.

Escribamos ahora las componentes:

$$a_\theta = R \left( -\frac{v_o^2}{R^2} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^2} \right) - R \frac{v_o^2}{R^2} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))} \quad (15)$$

$$= -\frac{v_o^2}{R} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \sin^2 \theta)^2} [1 + 1 + \sin^2(\theta)] \quad (16)$$

$$= -\frac{v_o^2}{R} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \sin^2 \theta)^2} [2 + \sin^2(\theta)] \quad (17)$$

Por otro lado el termino senital (en  $\hat{\phi}$ ) es igual a

$$a_\phi = R \left( -\frac{v_o^2}{R} \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^2} \right) \sin(\theta) + 2R \left( \frac{v_o^2}{R^2} \frac{1}{1 + \sin^2(\theta)} \right) \cos(\theta) \quad (18)$$

$$= \frac{v_o^2}{R} \frac{\cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^2} [-\sin^2(\theta) + 2(1 + \sin^2(\theta))] \quad (19)$$

$$= \frac{v_o^2}{R} \frac{\cos(\theta)}{(1 + \sin^2(\theta))^2} [2 + \sin^2(\theta)] \quad (20)$$

Ahora para encontrar el radio de curvatura usamos la formula:

$$R_c = \frac{|\dot{\vec{r}}|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \quad (21)$$

$$= \frac{v_o^3}{|v_\theta a_\phi \hat{r} - v_\phi a_\theta \hat{r} - v_\theta a_r \hat{\phi} + v_\phi a_r \hat{\theta}|} \quad (22)$$

$$= \frac{v_o^3}{\sqrt{(v_\theta a_\phi - v_\phi a_\theta)^2 + v_\theta^2 a_r^2 + v_\phi^2 a_r^2}} \quad (23)$$

$$(24)$$

En el ecuador  $\theta = \pi/2 \implies \sin(\theta) = 1, \cos(\theta) = 0$ , con lo que

$$\dot{\theta} = \frac{v_o}{R\sqrt{2}} \quad (25)$$

$$v_\theta = R\dot{\theta} = \frac{v_o}{\sqrt{2}} \quad (26)$$

$$v_\phi = R\dot{\theta} \sin(\theta) = \frac{v_o}{\sqrt{2}} \quad (27)$$

$$a_\phi = 0 \quad (28)$$

$$a_\theta = 0 \quad (29)$$

$$a_r = -R\dot{\theta}^2(1 + \sin^2(\theta)) = -\frac{v_o^2}{R} \quad (30)$$

---

Entonces,

$$R_c = \frac{v_o^3}{\sqrt{2v_\theta^2 a_\phi^2}} \quad (31)$$

$$= \frac{v_o^3}{\sqrt{2\frac{v_o^2}{2}\frac{v_o^4}{R^2}}} \quad (32)$$

$$= R \quad (33)$$