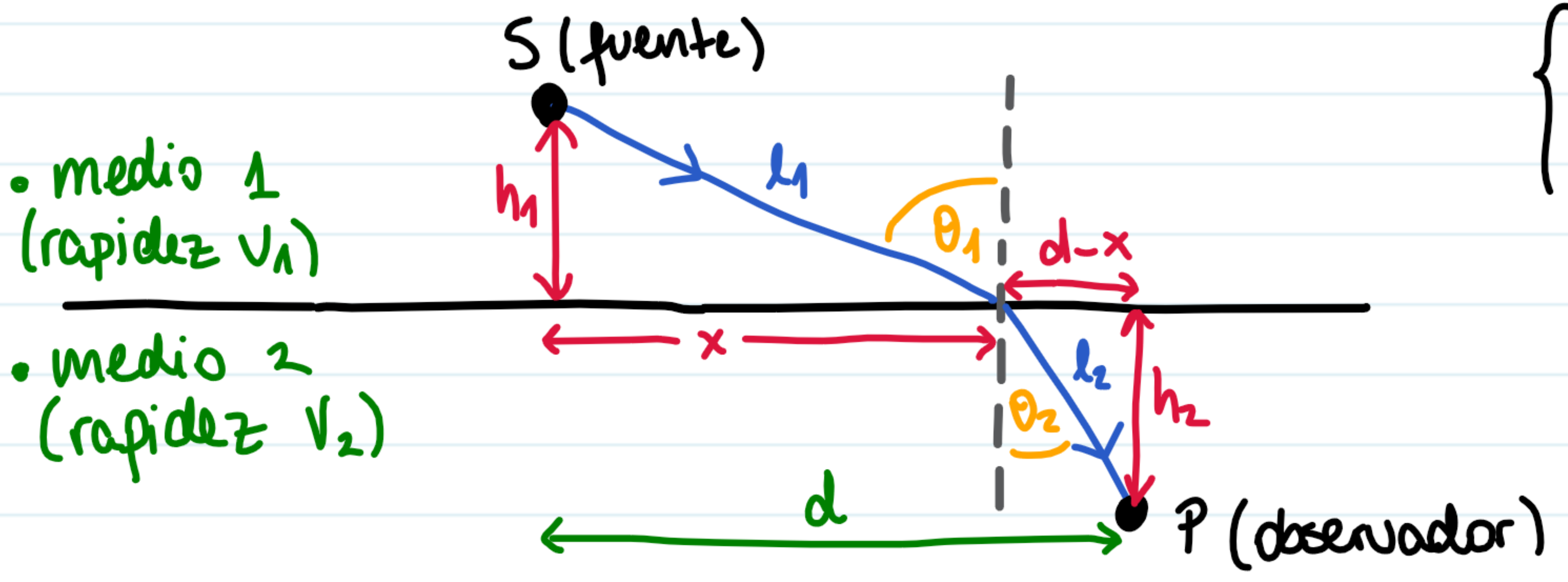
Pauta Aux. 6:

$\boxed{P1}$ A partir del principio de Fermat, deduzca la Ley de Snell: $\boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2}$

El principio de Fermat dice que la luz recorre la trayectoria de menor tiempo!
Dibujemos una refracción general:



$\begin{cases} \theta_1: \text{ ángulo de incidencia.} \\ \theta_2: \text{ " " refracción.} \end{cases}$

• La distancia recorrida por el rayo, desde S hasta P es L:

$$L = l_1 + l_2 = \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 - (d-x)^2}$$

• La luz viaja con ≠ rapidez en cada medio. Luego, el tiempo total que demora en viajar de S hasta P es t:

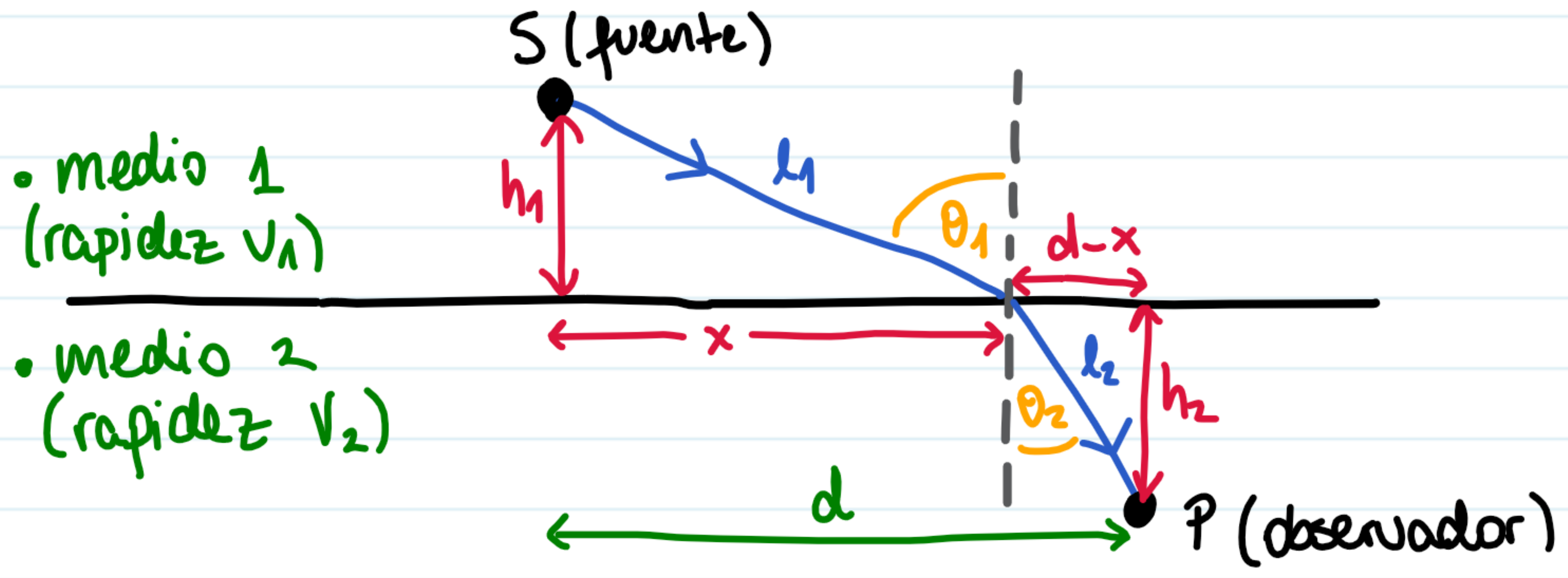
$$t = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

$\Rightarrow$ $t = t(x)$ es una función de x. Por el principio de Fermat, $t(x)$ debe ser mínimo.

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{h_1^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{\cancel{2}(d-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \qquad (1)$$

Ahora volvemos al dibujo y notamos:



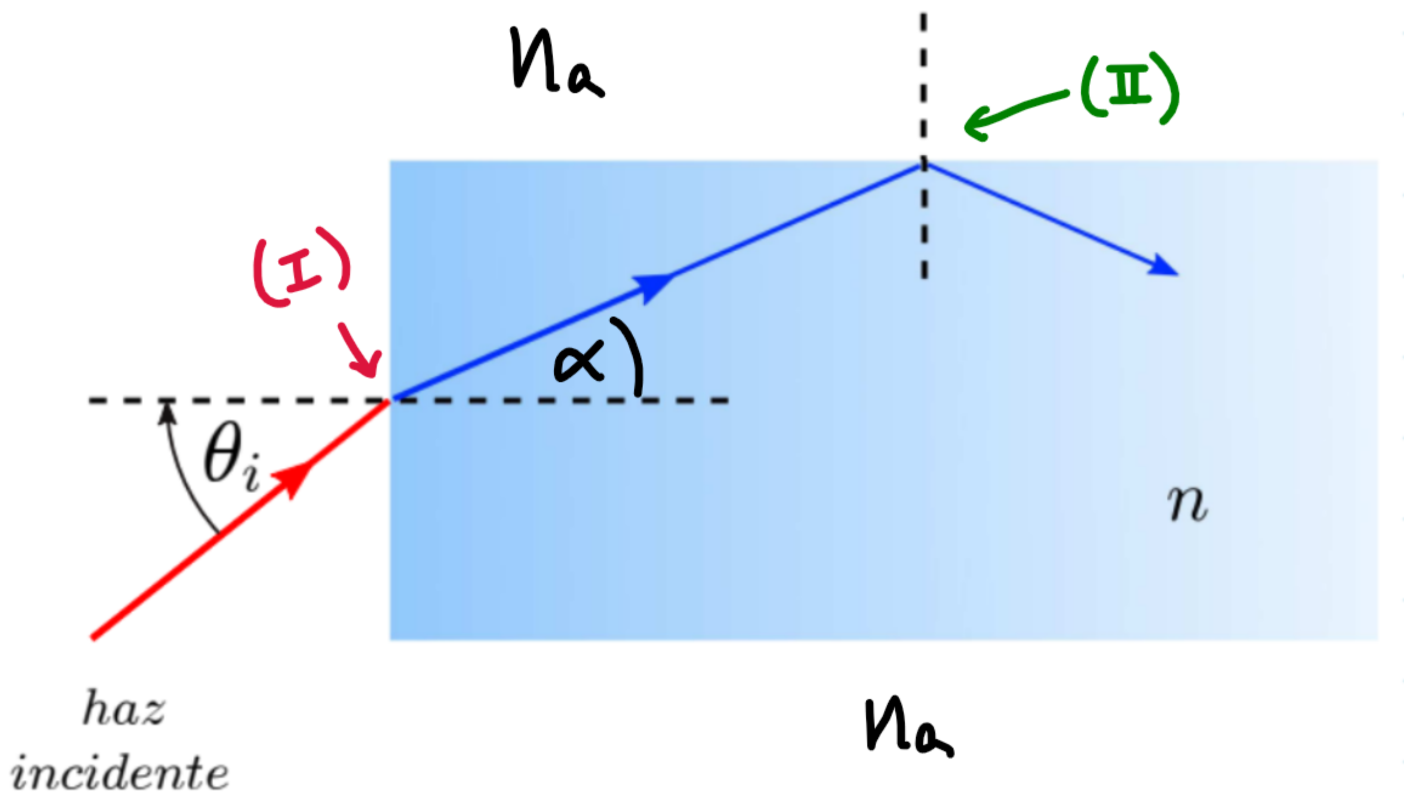
$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \dfrac{x}{l_1} = \operatorname{sen}\theta_1 \\[2ex] \dfrac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \dfrac{d-x}{l_2} = \operatorname{sen}\theta_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Reemplazando en (1) tenemos:

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1} \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{v_2} \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \qquad / \cdot c \qquad \left(n = \frac{c}{v}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2}$$ → Ley de Snell de la refracción.

P2) Rayo de luz entra a fibra óptica rodeada de aire. Determine el rango de valores de n (índice de refracción de la fibra óptica) para que ningún rayo incidente escape de la fibra.



- Datos: $\begin{cases} n: \text{ índice de la fibra} \\ n_a: \ \text{〃 del aire.} \\ \theta_i: \text{ ángulo de incidencia.} \end{cases}$

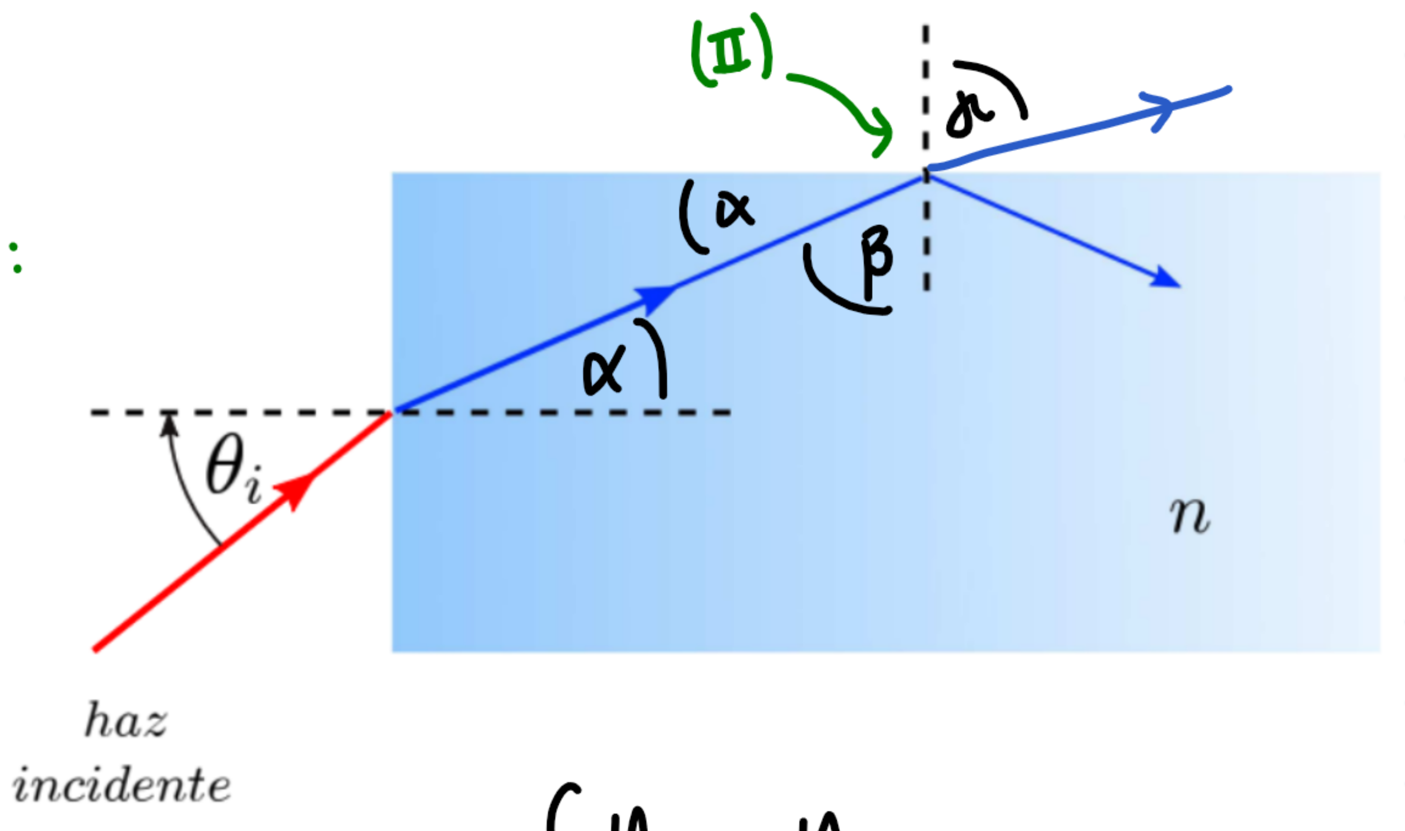
Analicemos la primera refracción (I):

Por la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad \text{con: } \begin{cases} n_1 = n_a \\ n_2 = n \\ \theta_1 = \theta_i \\ \theta_2 = \alpha \end{cases}$$

(haz incidente "proveniente" del aire)

$$\Rightarrow n_a \operatorname{sen}\theta_i = n \operatorname{sen}\alpha \quad \ldots (1)$$



Ahora analicemos la segunda refracción (II):

Ahora, notamos del dibujo que el ángulo de incidencia en esta refracción es β, y se cumple que:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \ldots (2)$$

Luego, por Snell tenemos: $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$ con: $\begin{cases} n_1 = n \\ n_2 = n_a \\ \theta_1 = \beta \\ \theta_2 = \gamma \end{cases}$

$$\Rightarrow n \operatorname{sen}\beta = n_a \operatorname{sen}\gamma$$

Reemplazando β de (2) y utilizando que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$:

$$\Rightarrow n \cos\alpha = n_a \operatorname{sen}\gamma \quad \ldots (3)$$

Pero sabemos que en esta refracción debe haber reflexión total interna!

$$\Rightarrow \gamma = \pi/2 \overset{(3)}{\Rightarrow} n\cos\alpha = n_a \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = n_a \quad \ldots (4)$$

Luego, tenemos 2 ecs ((1) y (4)) y nuestra incógnita es n:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & n_a \operatorname{sen}\theta_i = n \operatorname{sen}\alpha \\ (2) & n_a = n\cos\alpha \end{array}\right\} \quad (1)^2 + (2)^2 \text{ para eliminar } \alpha \text{ que no conocemos:}$$

$$\Rightarrow n^2 (\underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1}) = n_a^2 (1 + \operatorname{sen}^2\theta_i)$$

$$\Rightarrow n^2 = n_a^2 (1 + \operatorname{sen}^2\theta_i) \Rightarrow \boxed{n = n_a \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\theta_i}}$$

↳ Índice de la fibra para θ_i

Finalmente, como nos piden el rango de valores de n, reemplazamos $n_a = 1$ y notamos que si queremos que siempre haya reflexión total interna, entonces debe cumplirse incluso cuando θ_i es el "menos favorable", es decir, incluso para:

$$\theta_i = \pi/2 \quad \text{(caso extremo)}$$

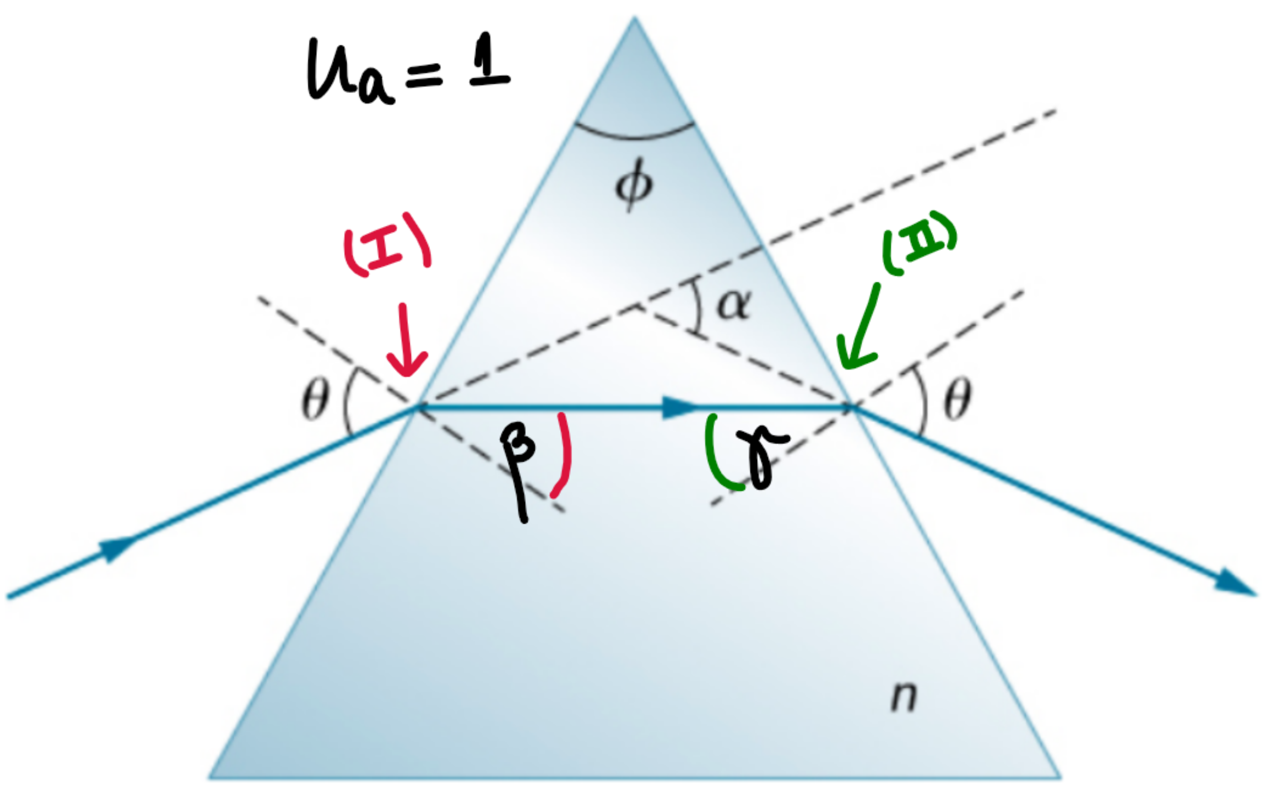
En ese caso, $n_{mín} = n_a \sqrt{1 + \underbrace{\operatorname{sen}^2(\pi/2)}_{1}} = \cancel{n_a}^{1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

→ Así, si $n \geq n_{mín}$, siempre tendremos reflexión total interna, indep. del valor de θ_i.

$$\Rightarrow \boxed{n \geq \sqrt{2}} \rightarrow \text{rango de valores de } n.$$

P3) Rayo cae con ángulo θ sobre el prisma, tal que sale por el otro lado con ángulo θ también. Demuestre que:

$$n = \frac{\operatorname{sen}((\alpha+\phi)/2)}{\operatorname{sen}(\phi/2)}$$



Analizamos la primera refracción (I):
Por Snell:

$$n_a \cdot \operatorname{sen}\theta = n \cdot \operatorname{sen}\beta \quad \ldots (1)$$

Ahora la segunda refracción (II):
Por Snell:

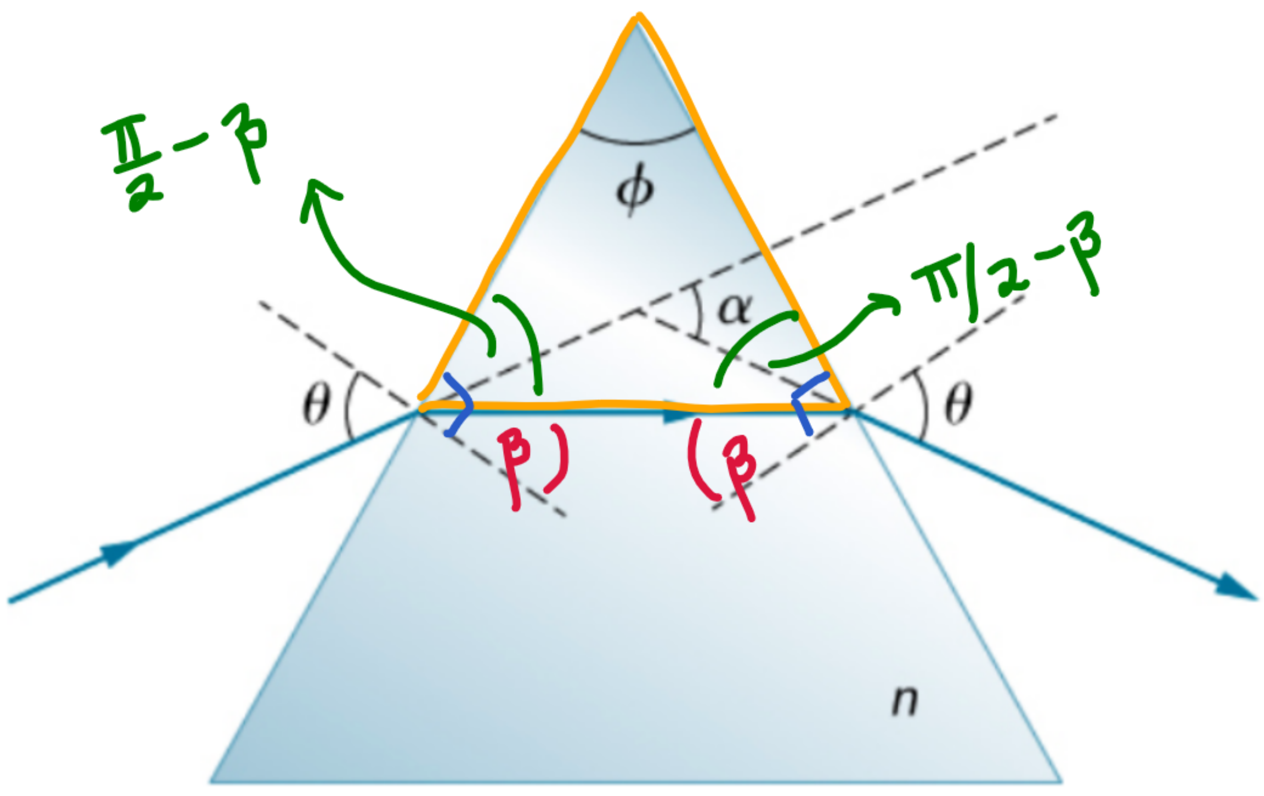
$$n \operatorname{sen}\gamma = n_a \cdot \operatorname{sen}\theta \ldots (2)$$

Igualando (1) y (2) tenemos que: $\operatorname{sen}\gamma = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \boxed{\gamma = \beta}$

y podemos despejar n de (1) ó (2). De (1):

$$\Rightarrow \quad n = n_a \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\beta} \quad \ldots (3)$$

La única opción para seguir es calcular $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}\beta$ del dibujo:



→ Mirando el triángulo amarillo:

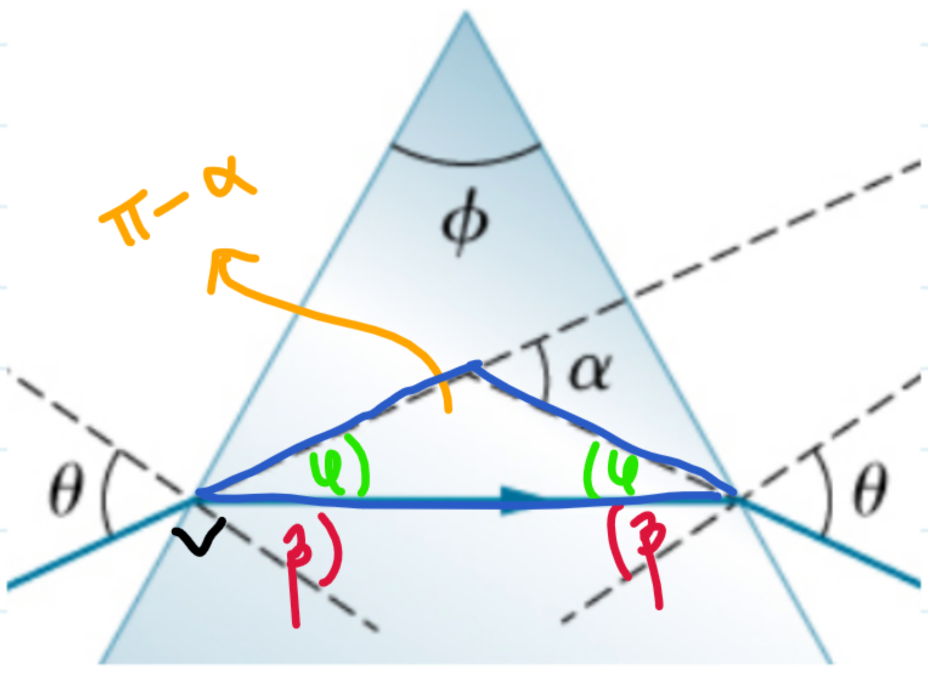
$$\phi + 2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) \stackrel{!}{=} \pi \quad (180°)$$

$$\Rightarrow \phi + \cancel{\pi} - 2\beta = \cancel{\pi}$$

$$\Rightarrow \phi = 2\beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\phi}{2}} \; (*)$$

relación entre β y ϕ

Ahora nos falta relacionar α con θ:



Vemos que: $\boxed{\theta = \varphi + \beta}$ (op. por el vértice)

y que además, del triángulo azul:

$$2\varphi + (\cancel{\pi} - \alpha) \stackrel{!}{=} \cancel{\pi}$$

$$\Rightarrow \varphi = \alpha/2 \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{2} + \beta$$

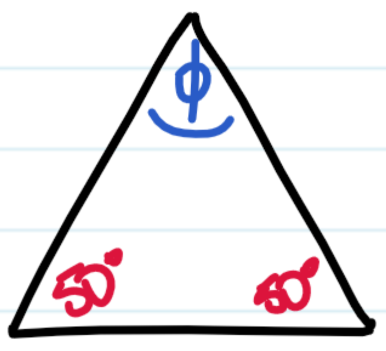
$$\Rightarrow \text{Por } (*) \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\phi}{2} = (\alpha+\phi)/2} \; (*)$$

Reemplazando (*) y (*) en (3) tenemos ($n_a = 1$):

$$\Rightarrow n = \cancel{n_a}^{1} \cdot \frac{\operatorname{sen}((\alpha+\phi)/2)}{\operatorname{sen}(\phi/2)} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\operatorname{sen}((\alpha+\phi)/2)}{\operatorname{sen}(\phi/2)}}$$

↳ índice de refracción del prisma

→ Si $\alpha = 37°$, y los ángulos de la base del prisma son 50° c/u. ¿n?



$$\phi = 180° - 100° = 80° \quad , \quad \alpha = 37°$$

$$\Rightarrow n = \frac{\operatorname{sen}((80+37)/2)}{\operatorname{sen}(40)} = \frac{\operatorname{sen}(117/2)}{\operatorname{sen}(40)} \approx 1{,}32.$$