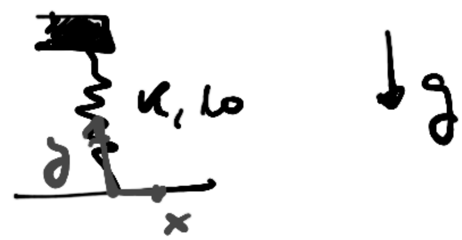
# Pauta Aux 3

P1)

Tenemos




Hacemos el DCL:


Luego 2da Ley de Newton:

$$m a_y = -k(y - l_0) - mg$$

$$\boxed{\ddot{y} = a_y = -\frac{k}{m}(y - l_0) - g}$$

Ecuación de movimiento

Para la pos. de equilibrio $\ddot{y} = \underline{a_y = 0}$

$$0 = -\frac{k}{m}(y_{eq} - l_0) - g$$

$$g = -\frac{k}{m} y_{eq} + \frac{k}{m} l_0$$

$$g - \frac{k l_0}{m} = -\frac{k}{m} y_{eq} \qquad / \cdot \frac{m}{k}$$

$$\frac{mg}{k} - l_0 = -y_{eq} \qquad / \cdot -1$$

$$\boxed{l_0 - \frac{mg}{k} = y_{eq}} \longrightarrow \text{posición de equilibrio}$$

ii) queremos $y(t)$, para ello debemos resolver la ecuación de movimiento

$$a_y = -\frac{k}{m}(y - l_0) - g$$

factorizamos y colocamos a $g$ en el paréntesis

$$a_y = -\frac{k}{m}\left(y - l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$= -\frac{k}{m}\Big(y - \underbrace{\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)}_{y_{eq}}\Big)$$

$$a_y = -\frac{k}{m}(y - y_{eq})$$

Definimos $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$a_y = -\omega_0^2 \underbrace{(y - y_{eq})}_{z = y - y_{eq}}$$

Para obtener la ecuación del m.a.s cambiamos de sistema

$z = y - y_{eq}$

$v_z = v_y$

$a_z = a_y$

$$\boxed{a_z = -\omega_0^2 z}$$

$\downarrow$

Sabemos su solución

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_z(t) = -z_0 \omega_0 \,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

$$a_z(t) = -z_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

luego como $z(t) = y(t) - y_{eq}$

$$y(t) = z(t) + y_{eq}$$

$$= z(t) + l_0 - \frac{mg}{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= Z_0\cos(\omega_0 t + \phi) + l_0 - \frac{mg}{k} \\ v_y = v_z &= -Z_0\omega_0 \operatorname{Sen}(\omega_0 t + \phi) \\ a_y = a_z &= -Z_0\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}}$$

iii) Energia cinetica (K)

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v_y^2$$

$$= \frac{m}{2}\left(-Z_0\omega_0 \operatorname{Sen}(\omega_0 t + \phi)\right)^2$$

Energia potencial (U)

$$U = U_e + U_g$$

$$= \frac{k}{2}(y - l_0)^2 + mgy$$

$$= \frac{k}{2}\left(z_0 \cos(\omega_0 t + \phi) + l_0 - \frac{mg}{k} - l_0\right)^2$$

$$+$$

$$mg \cdot \left(z_0 \cos(\omega_0 t + \phi) + l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

Energía total $= K + U$ , pero como se conserva la energía, será igual en todo tiempo $\Rightarrow$ evaluamos en $t=0$

$$K(t=0) = \frac{m}{2} z_0^2 \omega_0^2 \operatorname{sen}^2(\phi)$$

$$U(t=0) = \frac{k}{2}\left(z_0 \cos(\phi) - \frac{mg}{k}\right)^2 + mg\left(z_0 \cos(\phi) + l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

$$= \frac{k}{2}\left(z_0^2 \cos^2(\phi) - 2 z_0 \frac{mg}{k} \cos(\phi) + \frac{m^2 g^2}{k^2}\right) + mg\left(z_0 \cos(\phi) + l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

$$= \frac{k}{2} z_0^2 \cos^2\phi - \cancel{z_0 mg \cos\phi} + \cancel{\frac{m^2 g^2}{k}} + \cancel{mg z_0 \cos\phi} + mg l_0 - \cancel{\frac{m^2 g^2}{k}}$$

Luego

$E_{total} = U + K$

$$= \frac{K}{2} z_0^2 \cos^2\phi + mg\,l_0 + \frac{m}{2}\,\underline{\omega_0^2}\,z_0^2\,\text{sen}^2\phi$$

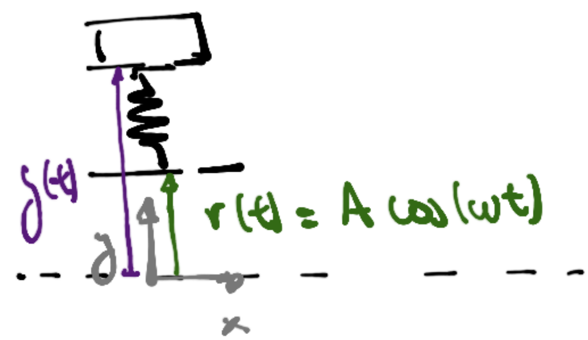
$$= \frac{K}{2} z_0^2 \cos^2\phi + mg\,l_0 + \frac{m}{2}\,\frac{K}{m}\,z_0^2\,\text{sen}^2\phi$$

$$= \frac{K}{2} z_0^2 \cancelto{1}{(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi)} + mg\,l_0$$

$$= \frac{K}{2} z_0^2 + mg\,l_0$$

P2)

tenemos el mismo objeto de la P1), pero el suelo se mueve:




La ecuación de movimiento es la misma que en la P1, pero la elongación del resorte, que antes era $y - l_0$, ahora será $((y - r) - l_0)$ debido al movimiento del suelo

$$\longrightarrow \quad m a_y = -k(y - r(t) - l_0) - mg$$

$$a_y = -\frac{k}{m}(y - r - l_0) - g$$

colocamos g dentro del paréntesis

$$a_y = -\frac{k}{m}\left(y - l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{k}{m} r(t)$$

donde $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\rightarrow \quad a_y = -\omega_0^2 \left( y - \underbrace{\left( l_0 - \frac{mg}{k} \right)}_{y_{eq}} \right) + \omega_0^2 \cdot r(t)$$

Cambiamos de nuevo al sistema $z = y - y_{eq}$

$v_z = v_y$

$a_z = a_z$

$$\ddot{z} = \boxed{a_z = -\omega_0^2 z + \omega_0^2 r(t)}$$

Para tener un m.a.s $\longrightarrow$ $\boxed{a_z = -\omega_0^2 z}$

Pero ahora tenemos : $a_z = -\omega_0^2 z + f(t)$

Oscilador forzado

Estamos en un oscilador forzado!

(con $f(t) = \omega_0^2 r(t) = \omega_0^2 A \cos(\omega t)$

$$* \quad \boxed{\ddot{z} = a_z = -\omega_0^2 z + \omega_0^2 A \cos(\omega t)}$$

y su solución es: (será visto en clases)

$$z(t) = B\cos(\omega t) + \bar{Z}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Donde

$$B = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\frac{k}{m} A}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{kA}{(k - m\omega^2)}$$

se le denomina $F_0$

Veamos si es solución:

$$z(t) = B\cos(\omega t) + \bar{Z}\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Luego

$$v_z = \dot{z} = -\omega B \,\text{sen}(\omega t) - \bar{Z}\omega_0 \,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

$$a_z = \ddot{z} = -\omega^2 B \cos(\omega t) - \bar{Z}\omega_0^2 \,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

Usando estos en $*$

$$-\omega^2 B\cos(\omega t) - \bar{Z}\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\phi)$$
$$= -\omega_0^2 Z(t) + \omega_0^2 A\cos(\omega t)$$

$$-\omega^2 B\cos(\omega t) - \cancel{\bar{Z}\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\phi)}$$
$$= -\omega_0^2 B\cos(\omega t) - \cancel{\omega_0^2 \bar{Z}\cos(\omega_0 t+\phi)}$$
$$+ \omega_0^2 A\cos(\omega t)$$

$$-\omega^2 B\cancel{\cos(\omega t)} = -\omega_0^2 B\cancel{\cos(\omega t)} + \omega_0^2 A\cancel{\cos(\omega t)}$$

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) = \omega_0^2 A$$

$$\boxed{B = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Valor de B para que sea solución!

Luego tendremos que

$$z(t) = \underbrace{\bar{Z}\cos(\omega_0 t+\phi)}_{\text{se le llama la}} + \underbrace{\frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2-\omega^2}}_{\text{efecto de la}}\cos(\omega t)$$

solución libre          fuerza forzante

luego como $y(t) = y_{eq} + z(t)$

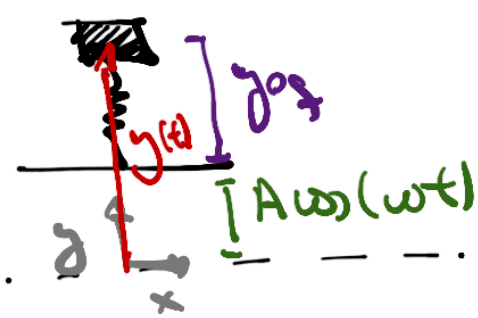
$$\boxed{y(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + \bar{Z}\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)}$$

b)

Colocamos las condiciones iniciales:

Parte del reposo → $\boxed{v_y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0}$

parte de la pos. de equilibrio:




$$y(t=0) = y_{eq} + A\,\cancel{\cos(\omega 0)}^{\,1}$$

$$y(t=0) = y_{eq} + A$$

$$\boxed{y(t=0) = l_0 - \frac{mg}{k} + A}$$

Ahora impongamos las:

primero la de la velocidad:

Sabemos que $\dot{y} = v_y = v_z = \dot{z} = -\bar{Z}\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi) - \omega B \operatorname{sen}(\omega t)$

$\rightarrow$ en $t=0$,

$$0 = -\bar{Z}\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 \cdot 0 + \phi) - \omega B \cancel{\operatorname{sen}(\omega \cdot 0)}^{0}$$

$$0 = -\bar{Z}\omega_0 \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 0}$$

Ahora imponemos la altura inicial $y(t=0) = l_0 - \frac{mg}{k} + A$

$$y(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + \bar{Z}\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

en $t=0$,

$$\cancel{l_0 - \frac{mg}{k}} + A = \cancel{l_0 - \frac{mg}{k}} + \bar{Z}\cancel{\cos(\omega_0 \cdot 0 + 0)}^{1} + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cancel{\cos(\omega 0)}^{1}$$

$$\boxed{\bar{Z} = A\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

Luego

$$\boxed{y(t) = l_0 - \frac{mg}{k} + A\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)}$$

(Se dice que para $t \to \infty$ (tiempos avanzados) domine la solución del forzamiento)

para que exista resonancia la amplitud debe tomar su valor máximo.

Para $t \to \infty$, solo nos quedamos con:

$$z(t) = \frac{\omega_0 A^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$$

→ amplitud

Esta es la relación que debe ocurrir!

el valor maximo ocurre cuando $\omega_0^2 = \omega^2$

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$