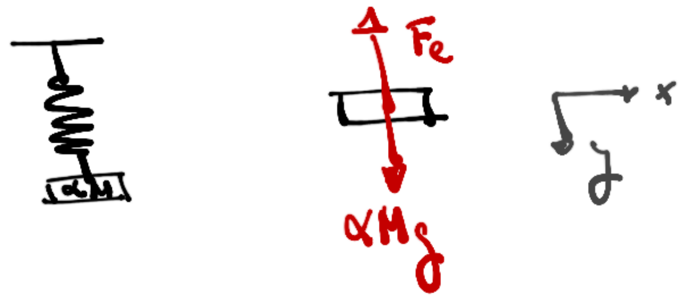
P1)

i) Queremos la nueva posición de equilibrio, para ello hacemos el DCL:



Con $F_e = -k(y - l_0)$

Con esto anotamos la 2^{da} Ley de Newton:

$$\alpha M a_y = -k(y - l_0) + \alpha M g$$

y para que esté en equilibrio $a_y = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = -k(y_{eq} - l_0) + \alpha M g$$

$$k y_{eq} = k l_0 + \alpha M g$$

$$\boxed{y_{eq} = l_0 + \frac{\alpha M g}{k}}$$

ii) Queremos encontrar $y(t)$, es decir dónde está el bloque en función del tiempo.

Para ello notemos que este problema describe un m.a.s.

Ecuación del m.a.s $\longrightarrow$ $a_x = -\omega^2 x$

donde la solución es
$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi) \\ v(t) = \dot{x}(t) = -x_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \\ a(t) = \ddot{x}(t) = -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

En este caso tenemos:

$$\alpha M a_y = -k(y - l_0) + \alpha M g$$

$$a_y = \frac{-k}{\alpha M}(y - l_0) + \alpha g$$

$$a_y = \frac{-k}{\alpha M}\left(y - \underline{l_0 + \frac{\alpha M g}{k}}\right)$$

y_{eq}

$$a_y = \frac{-k}{\alpha M}(y - y_{eq}) \qquad \frac{k}{\alpha M} = \omega^2$$

$$a_y = -\omega^2 (y - y_{eq})$$

Luego tenemos algo igual a la aux 1. Aquí uno cambie de variable o de sis. de referencia

$$z = y - y_{eq}$$ Nuevo sist. de referencia

Este sistema es el que su origen parte en la pos. de equilibrio.

Con este: $a_y = a_z$

Quedando $a_z = -\omega^2 z$, para lo cual sabemos nus soluciones:

$$z(t) = z_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_{eq} + z_0 \cos(\omega t + \phi) \\ &= l_0 + \frac{\alpha M g}{k} + z_0 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}}$$

iii) Queremos encontrar amplitud (z_0), periodo ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), fase (ϕ)

Comenzemos con el más sencillo:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha M}{K}}}$$

Ahora, para obtener z_0 y ϕ necesitamos imponer condiciones iniciales.

¿Cuánto es $y(t=0)$? ¿Cuánto es $v_y(t=0) = \dot{y}(t=0) = ?$

Según el enunciado comienza el movimiento en la primera posición de equilibrio (cuando la masa es M)

→ esa pos. de equilibrio y

$$M a_y = -K(y - l_0) + Mg$$

$$\cancel{a_y} = -\frac{K}{M}(y - l_0) + Mg$$

$$0 = -\frac{K}{M}(y_{eq} - l_0) + g$$

$$\boxed{y_{eq.1} = l_0 + \frac{Mg}{K}}$$

→ $$\boxed{y(t=0) = l_0 + \frac{Mg}{K}}$$

y comienza del reposo $\Rightarrow \boxed{V_y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0}$

Ahora imponiendo estas, encontraremos z_0 y ϕ

Recordemos que

$$① \quad \boxed{y(t) = l_0 + \frac{\alpha M g}{k} + z_0 \cos(\omega t + \phi)}$$

Además como $z = y - y_{eq}$, $V_z = V_y \wedge a_z = a_y$

luego $$\boxed{V_y(t) = \dot{y}(t) = -z_0 \omega \, \text{sen}(\omega t + \phi)} \quad ②$$

Ahora imponiendo $V_y(t=0) = 0$: ② nos queda:

$$V_y(t=0) = 0 = -z_0 \omega \, \text{sen}(\omega \cdot 0 + \phi)$$

$$0 = -z_0 \omega \, \text{sen}(\phi)$$

$$\longrightarrow \boxed{\phi = 0}$$

Por último imponemos en ① $y(t=0) = l_0 + \frac{Mg}{k}$

$$y(t=0) = l_0 + \frac{Mg}{K} = l_0 + \frac{\alpha Mg}{K} + z_0 \cancel{\cos(\omega \cdot 0 + \phi)}^{1}$$

$$\cancel{l_0} + \frac{Mg}{K} = \cancel{l_0} + \frac{\alpha Mg}{K} + z_0$$

$$\boxed{\frac{Mg(1-\alpha)}{K} = z_0}$$

iv) Por último las energías:

1) Energía cinética $= \frac{m v^2}{2} = E_c$

Aquí $m = \alpha M$ y $v = v_y = \dot{y} = -z_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$$= -\frac{Mg}{K}(1-\alpha)\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\rightarrow \boxed{E_c = \frac{\alpha M}{2} \cdot \left(\frac{Mg}{K}\right)^2 (1-\alpha)^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)}$$

y la potencial $= U = \frac{K}{2} y^2 - mg y$.

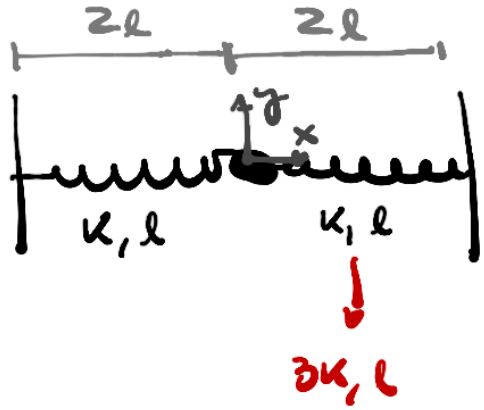
donde $y(t) = l_0 + \frac{\alpha Mg}{k} + \frac{Mg(1-\alpha)}{k}\cos(\omega t)$

$$\to U = \frac{k}{2}\left(l_0 + \frac{\alpha Mg}{k} + \frac{Mg(1-\alpha)}{k}\cos(\omega t)\right)^2$$

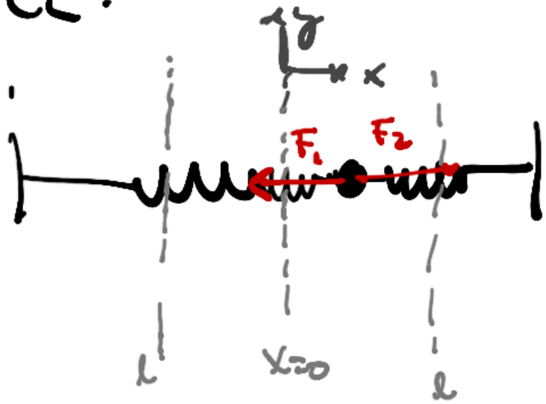
$$- \alpha Mg\left(l_0 + \frac{\alpha Mg}{k} + \frac{Mg(1-\alpha)}{k}\cos(\omega t)\right)$$

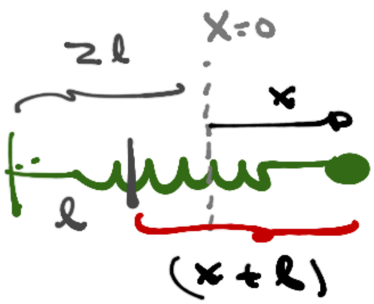
P2)

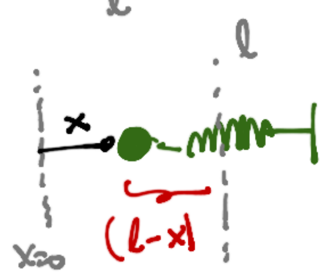
Tenemos



a) Queremos la posición de equilibrio, para ello desarrollemos el DCL:







2da Ley de Newton:

$$m a_x = -K(x+2l-l) + 3K(l-x)$$

$$= -K(x+l) + 3K(l-x)$$

$$= -4K\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

$$a_x = -\frac{4k}{m}\left(x - l/2\right)$$

para ver el pto de equilibrio $a_x = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq} = l/2}$$

b) Introducimos $y = x - l/2$

luego ya sabemos que $v_y = v_x \wedge a_y = a_x$

$\Rightarrow$ Nos queda la ecuación

$$a_y = -\frac{4k}{m}\, y \qquad \frac{4k}{m} = \omega^2$$

$$\boxed{a_y = -\omega^2 y}$$

$\hookrightarrow$ la cual sabemos su solución.

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = -y_0 \omega \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$a_y(t) = \ddot{y}(t) = -y_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$

Las condiciones iniciales eran $x(t=0) = 0$

$\wedge$ $v_x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$

En terminos de $y(t)$ serán:

Como $y = x - l/2 \longrightarrow y(t=0) = x(t=0) - l/2$

$$\boxed{y(t=0) = -l/2}$$

$v_y = v_x \longrightarrow \boxed{v_y(t=0) = v_x(t=0) = 0}$

Con estas podemos determinar las constantes $y_0 \wedge \phi$:

$v_y(t) = -y_0\omega \, \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

Como $v_y(t=0) = 0 \Longrightarrow$

$v_y(t=0) = 0 = -y_0\omega \, \mathrm{sen}(\phi)$

$\Longrightarrow \boxed{\phi = 0}$

Como $y(t=0) = -\ell/2 \implies y(t) = y_0 \cos(\omega t + \cancel{\phi}^{\,0})$

$$y(t=0) = -\ell/2 = y_0 \cancel{\cos(\omega \cdot 0)}^{\,1}$$

$$\implies \boxed{y_0 = -\ell/2}$$

Con esto nos queda que:

$$\boxed{y(t) = -\ell/2 \cos(\omega t)}$$

c) Recordamos que $x - \ell/2 = y$

$$\implies x(t) = \ell/2 + y(t)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos(\omega t)}$$

d) la frecuencia angular $= \omega$

La ω la definimos al inicio cuando dijimos

$$\omega^2 = \frac{4k}{m}$$

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

ii) Periodo $= T$ es $\frac{2\pi}{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

iii) La amplitud ya la obtuvimos (y_0)

$$A = |y_0| = |-\ell/2| = \ell/2$$

e) La energía potencial elástica es la suma de la energía de ambos resortes

$$\Rightarrow U_e(t) = \frac{k}{2}(x(t)+\ell)^2 + \frac{3k}{2}(x(t)-\ell)^2$$

$$= \frac{K}{2}\left(l/2 - \frac{l}{2}\cos(\omega t) + l\right)^2 + \frac{3K}{2}\left(l/2 - \frac{l}{2}\cos(\omega t) - l\right)^2$$

$$= \frac{K}{2}\left(\frac{3l}{2} - \frac{l}{2}\cos(\omega t)\right)^2 + \frac{3K}{2}\left(-\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos(\omega t)\right)^2$$

$$= \frac{K}{2}\left(\frac{9l^2}{4} - \frac{3l^2}{2} + \frac{l^2}{4}\cos^2(\omega t)\right) + \frac{3K}{2}\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{4}\cos^2(\omega t)\right)$$

$$= \frac{Kl^2}{8}\cos^2(\omega t) + \frac{K\cdot 3l^2}{8} + \frac{3K\cdot 3l^2}{8} + \frac{3Kl^2}{8}\cos^2(\omega t)$$

$$\boxed{U_e = \frac{Kl^2}{2}\cos^2(\omega t) + \frac{3Kl^2\cdot 4}{8}}$$

Energia cinética: $U_c = \frac{mv^2}{2}$

$$= \frac{m}{2}(v_x(t))^2 = \frac{m}{2}\left(-\jmath_0\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\right)^2$$

$$= \frac{m}{2}\left(-\frac{l}{2}\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\right)^2$$

$$= \frac{ml^2\omega^2}{8}\mathrm{sen}^2(\omega t)$$

Por últimos la E mecanica : $E = U_c + U_e$

pero este es constante entodo el mov. luego elijamos un t en que podamos sumar $U_c + U_e$ más facil.

Escogiendo $t=0 \Rightarrow U_c = 0$

$$U_e = \frac{k\ell^2}{2} + \frac{3k\ell^2 4}{8}$$

$$= \frac{4k\ell^2 + 12k\ell^2}{8}$$

$$U_e = 2k\ell^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = U_c + U_e = 2k\ell^2 = cte}$$