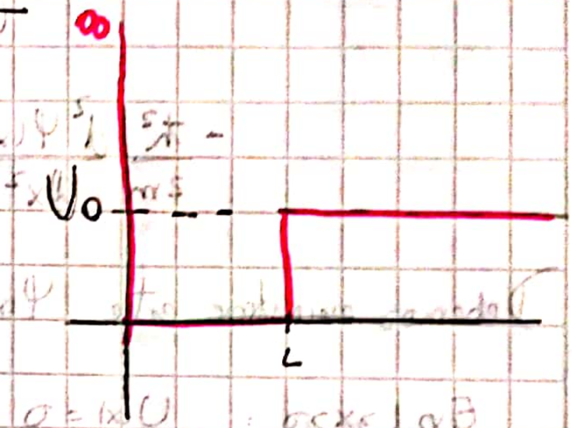
Pauta Aux 13

P1)

Tenemos el potencial



Es decir

$$U(x) = \begin{cases} +\infty & x \leq 0 \\ 0 & L > x \geq 0 \\ U_0 & x > L \end{cases}$$

a) La partícula no puede estar en $x \leq 0$ ya que el potencial en esa zona es inalcanzable.

Por otra parte a pesar que $E < U_0$ la partícula debido a efectos cuánticos podrá estar en la zona donde el potencial vale U_0, con menor probabilidad que entre 0 y L, pero igualmente con alguna probabilidad.

b) Debemos calcular la función de onda que satisfaga la ec. de Schrodinger y que cumpla con las condiciones de este potencial.

→ Ec de Schrodinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x)\,\Psi(x) = E\,\Psi(x)$$

Debemos encontrar este $\Psi(x)$:

En $L \geq x \geq 0$: $U(x) = 0$

$$\rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\,\Psi(x)$$

$$\underline{\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\,\Psi(x)}$$

Solución: $\Psi(x) = A\,e^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x} + B\,e^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\,x}$

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ $\quad \boxed{\Psi(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx}}$

Esta solución entre 0 y L debe cumplir con las condiciones del problema, que es que no puede estar la partícula en $x \leq 0$

→ Condición: $\Psi(x) = 0$

$$A \cdot e^{ik\cdot 0} + B\,e^{-ik\cdot 0} = 0$$

$$A + B = 0$$

$\rightarrow \boxed{A = -B}$

Luego para $L \geq x \geq 0$:

$$\psi(x) = A e^{ikx} - A e^{-ikx}$$

$$= A(\underbrace{e^{ikx} - e^{-ikx}})$$

par impar

$= \cos(kx) + i\,\text{sen}(kx) - \cos(-kx) - i\,\text{sen}(-kx)$

$= \cancel{\cos(kx)} + i\,\text{sen}(kx) - \cancel{\cos(kx)} + i\,\text{sen}(kx)$

$= 2i\,\text{sen}(kx)$

$$\boxed{\psi(x) = 2Ai\,\text{sen}(kx)}$$

Ahora, para $x \geq L$ $\quad U(x) = U_0$, con $U_0 > E$.

Ec de Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_0\psi(x) = E\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - U_0)\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{-2m(E-U_0)}{\hbar^2}\psi(x)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}\psi(x)$$

Notemos ahora que el lado derecho de la ecuacion es positivo, antes era negativo, cuando es positivo la solucion no es una exponencial imaginaria o senos, sino que una exponencial real

$$\psi(x) = C e^{\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}\,x} + D e^{-\sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}\,x}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$$

$$\boxed{\psi(x) = C e^{k'x} + D e^{-k'x}}$$

Pero pensemos en esta función para $x \to \infty$, como hay una exponencial $Ce^{k'x}$, $\psi(x) \to \infty$ y esto no puede pasar, ya que $|\psi(x)|^2$ es la prob de encontrar a la particula en x, y estaria siendo $+\infty$ en $+\infty$ lo cual no tiene sentido ya que significaria que la particula esta en $+\infty$ y a parte se debe cumplir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 = 1,$$

y con lo anterior claramente diverge

$$\longrightarrow \boxed{C = 0}$$

Luego para $x \geq L$ $\boxed{\psi(x) = D e^{-k'x}}$

Por otra parte como tenemos dos valores de $\psi(x)$ en L, estos deben ser iguales

$\rightarrow$ como para $L \geq x \geq 0$ $\quad \psi(x) = 2iA\,\text{sen}(kx)$

$x \geq L \quad \psi(x) = D e^{-k'x}$

Evaluamos en L e igualamos:

$$2iA\,\text{sen}(kL) = D e^{-k'L}$$

$$\boxed{2iA\,\text{sen}(kL)\, e^{k'L} = D}$$

Además se debe cumplir que las derivadas en $L = x$ tienen que ser iguales

Ya con estas condiciones tenemos que

$$\psi(x) \begin{cases} 2iA\,\text{sen}(kx) & 0 \leq x \leq L \\ 2iA\,\text{sen}(kL)\, e^{k'L}\, e^{-k'x} & x \geq L \end{cases}$$

Donde A es una constante que normaliza $\psi(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 = 1$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad ; \quad k' = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

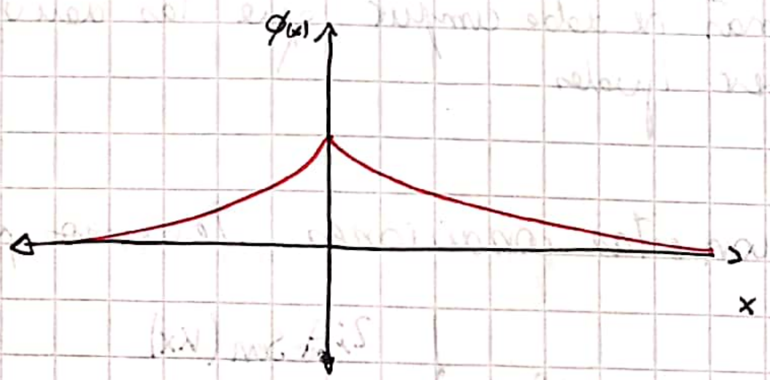
Luego la probabilidad de encontrar en x la partícula es

$$P = |\psi(x)|^2$$

P2)

Tenemos $\phi(x) = \begin{cases} e^{kx}, & x < 0 \\ e^{-kx}, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Graficamos



b) Veamos si para $x<0$ $e^{\kappa x}$ cumple con la ec. de Schrodinger:

Ec. de Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \cancel{U(x)}^{0}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\,\psi(x)$$

Como $\psi(x) = e^{\kappa x}$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \kappa e^{\kappa x}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \kappa^2 e^{\kappa x}$$

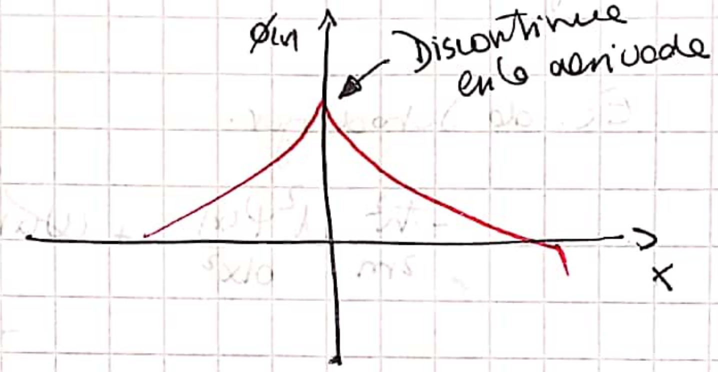
$$\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2 \cancel{e^{\kappa x}} = E\,\cancel{e^{\kappa x}}$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = E}$$ ✓

Lo cumple para $E<0$

c) Analogo a b)

d) NO es una posible solución debido a que en $x=0$ no es continua



Es discontinua ya que aunque $\varphi(x) = e^{kx}$ $x<0$
$= e^{-kx}$ $x\geq 0$

y evaluamos en 0 $\rightarrow$ $\psi(0) = 1$ $x<0$
$= 1$ $x\geq 0$

Pero la derivada también tiene que ser continua:

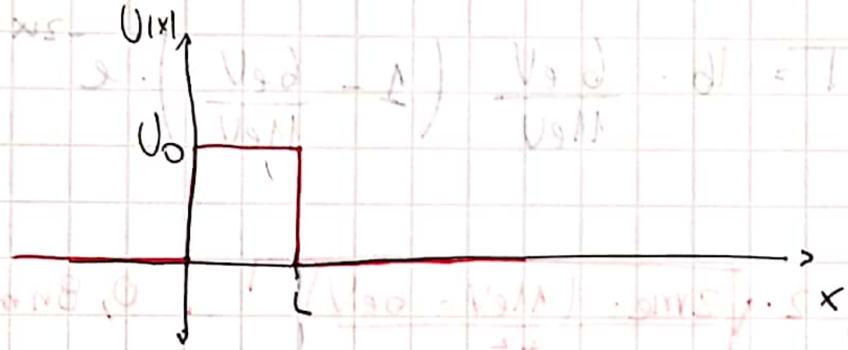
$\psi'(x) = k e^{kx}$ $x<0$
$-k e^{-kx}$ $x\geq 0$

$\psi'(0) = k$ $x<0$
$= -k$ $x\geq 0$

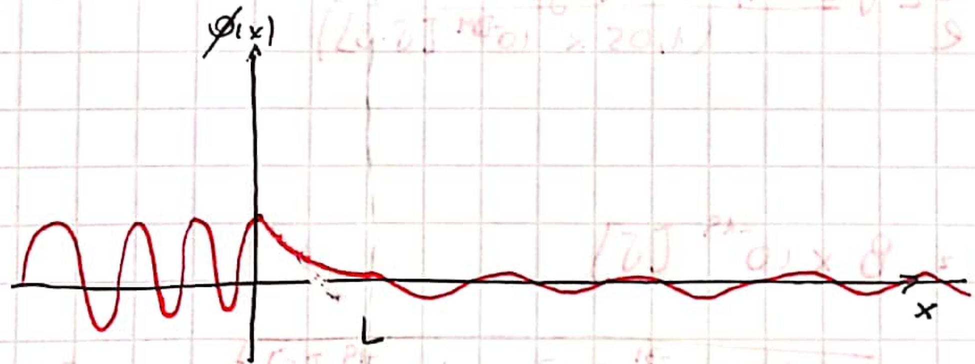
$\therefore$ como no es continua en derivada no puede ser posible solución.

P3)

Cuando tenemos un potencial tipo: con $E < U_0$



La función de onda de la partícula se comporta así:



Donde la probabilidad que cruze la barrera es:

$$T = G \cdot e^{-2KL} \quad \text{con } G = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right)$$

Ecuación 40.21 Sears

$$K = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Escaneado con CamScanner

En este caso $E = 6\ eV$
$U_0 = 11\ eV$

a) $L = 0{,}8\,nm$

$$\rightarrow T = 16 \cdot \frac{6\ eV}{11\ eV}\left(1 - \frac{6\ eV}{11\ eV}\right) \cdot e^{-2K \cdot L}$$

$$e^{-2KL} = e^{-2 \cdot \sqrt{\frac{2m_e \cdot (11\ eV - 6\ eV)}{\hbar^2}} \cdot 0{,}8\,nm}$$

$$= e^{-2\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \times 10^{-31} [Kg] \cdot 5\ eV}{(1{,}05 \times 10^{-34} [J \cdot s])}} \cdot 8 \times 10^{-10}\ m}$$

y $5\ eV = 8 \times 10^{-19}\ [J]$

$$\rightarrow e^{-2KL} = e^{-2\sqrt{\frac{2\ 9{,}1 \times 10^{-31} [Kg] \cdot 8 \times 10^{-19} [J]}{1{,}05 \times 10^{-34} [J \cdot s]}} \cdot 8 \times 10^{-10} [m]}$$

Evaluando: $\boxed{T = 4{,}4 \times 10^{-8}}$

Prob de que pase el efecto !