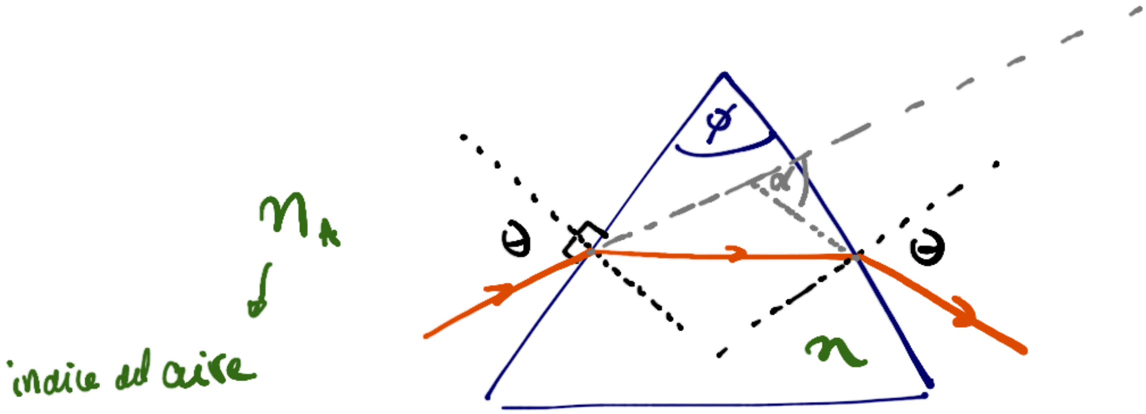
Pauta Aux 6

P1)

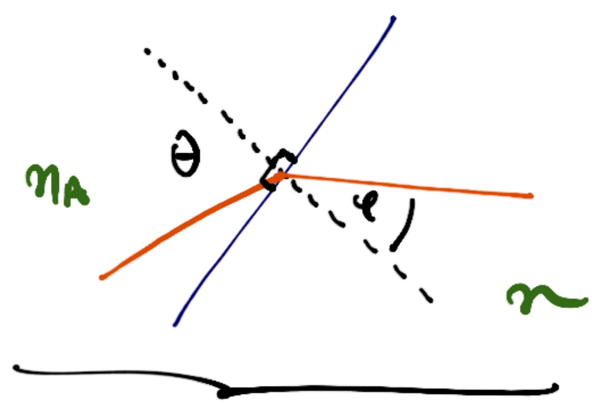
Tenemos un prisma que refracta un rayo de luz:



Y nos interesa obtener n.

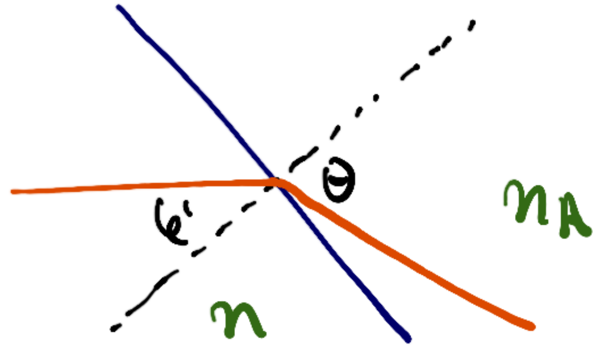
Usemos alguna ecuación que contenga n:

Cuando entra al prisma:



$$① \quad n_A \operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\varphi$$ Ley de Snell

Cuando sale:



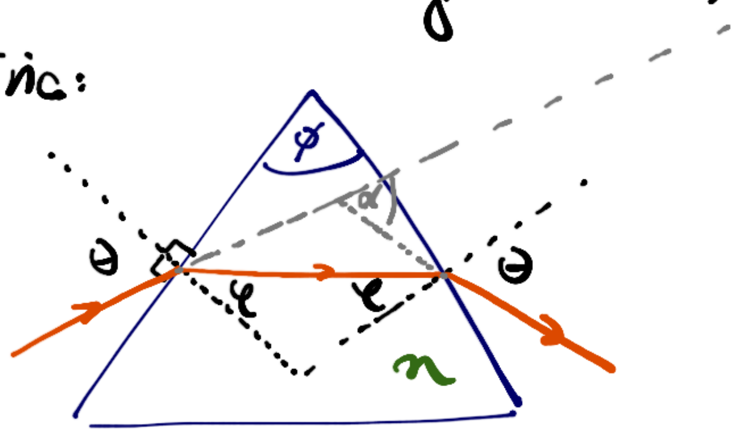
② $n \operatorname{sen} \varphi' = n_A \operatorname{sen} \theta$ Ley de snell

Notemos que viendo ① y ② $\varphi = \varphi'$.

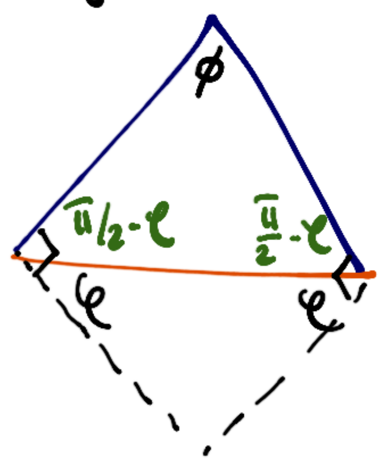
Luego de cualquiera podemos despejar n:

$$\boxed{n = n_A \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\varphi}}$$

Debemos obtener $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}\varphi$, analizamos la geometría:



haciendo zoom en uno de los triangulos podemos obtener φ en función de ϕ:



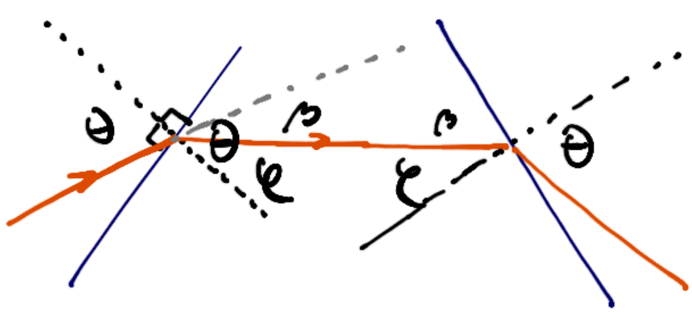
Como es un triangulo la suma de ángulos es π:

$$\phi+\frac{\pi}{2}-\varphi+\frac{\pi}{2}-\varphi=\pi$$

$$\phi+\pi-2\varphi=\pi$$

$$\boxed{\frac{\phi}{2}=\varphi}$$

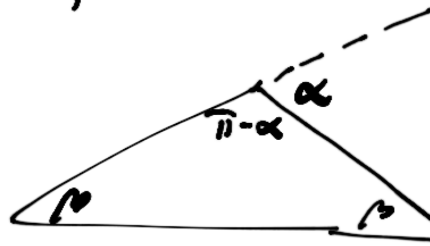
Por otra parte debemos despejar θ: Veamos que geometrica:



$$\theta=\beta+\varphi$$

Debemos obtener β

Pero el triangulo en que está β:



luego $\pi - \alpha + \beta + \beta = \pi$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \longrightarrow \theta = e + \frac{\alpha}{2}$$

Ya obtuvimos que es $\frac{\phi}{2}$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{2}(\phi + \alpha)}$$

luego $$n = n_A \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen} e}$$

$$= \overset{1}{\cancel{n_A}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\phi + \alpha)\right)}{\operatorname{sen}(\phi/2)}$$

$n_A \approx 1$, entorno en aire

$$\boxed{n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\phi + \alpha)\right)}{\operatorname{sen}(\phi/2)}}$$

Indice de refracción del prisma.

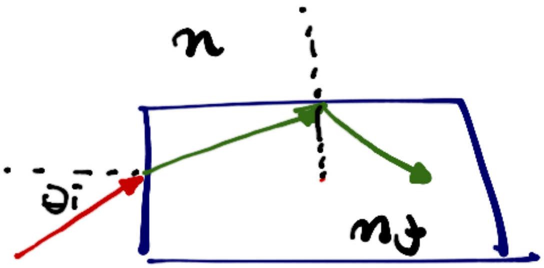
en el caso $\alpha = 37$ y $\phi = 80^\circ$

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(80+37)\right)}{\operatorname{sen}(80/2)}$$

$$\boxed{n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{117}{2}\right)}{\operatorname{sen}(40)} \approx 1{,}32}$$

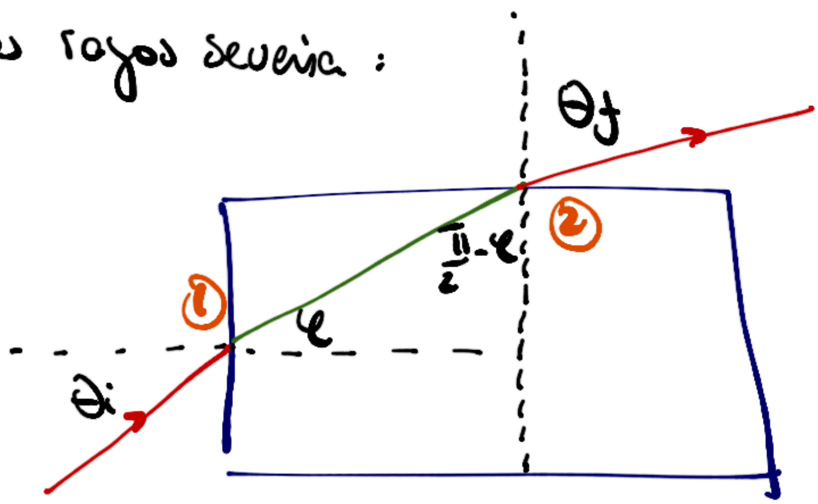
P2)

Tenemos:



Y queremos un rango de n para que ningún rayo escape de la fibra:

Si escaparan los rayos sería:



Para que escape $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ de lo contrario escapara:

Pero si usamos la ley de snell para las 2 refracciones:

①

$$n \operatorname{sen} \theta_i = n_f \operatorname{sen} \varphi$$

②

$$n_f \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}_{\cos\varphi} = n \operatorname{sen} \theta_f$$

$$n_f \cos\varphi = n \operatorname{sen} \theta_f$$

$①^2 + ②^2$

$$n^2(\operatorname{sen}^2 \theta_i + \operatorname{sen}^2 \theta_f) = n_f^2 \big(\underbrace{\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi}_{1}\big)$$

$$n^2(\operatorname{sen}^2 \theta_i + \operatorname{sen}^2 \theta_f) = n_f^2$$

Como queremos reflexión total ya exigimos que $\theta_f = \frac{\pi}{2}$

$$n^2(\operatorname{sen}^2 \theta_i + \underbrace{\operatorname{sen}^2(\pi/2)}_{1}) = n_f^2$$

$$n^2(\operatorname{sen}^2 \theta_i + 1) = n_f^2$$

y como es para cualquier θ_i, notemos que $0 \leq \operatorname{sen}^2 \theta_i \leq 1$

$$\operatorname{sen}^2 \theta_i = \frac{n_f^2}{n^2} - 1$$

Luego como tiene que funcionar para todo θ_i, tomamos que sea mayor al valor máximo:

$$\frac{n_f^2}{n^2} - 1 \geq 1$$

$$\frac{n_f^2}{n^2} \geq 2$$

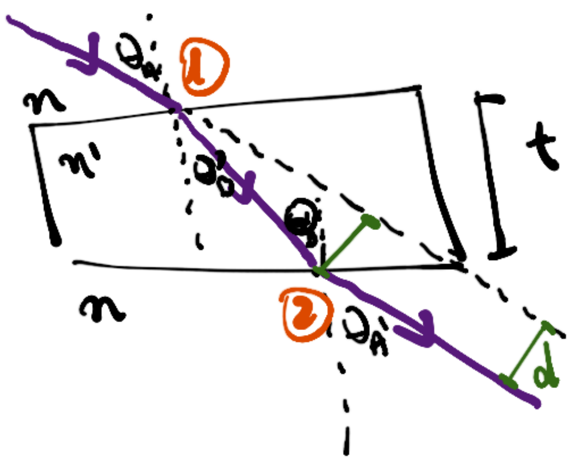
$$n^2 \leq \frac{n_f^2}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{n \leq \frac{n_f}{\sqrt{2}}}$$

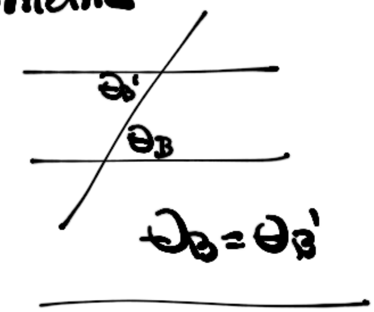
Luego si $n \leq \frac{n_f}{\sqrt{2}}$ se cumple siempre una reflexión total.

P3)

tenemos:



$\theta_B = \theta_B'$ por geometría



$\theta_B = \theta_B'$

a) Demostremos que $\theta_A = \theta_A'$, para ello usemos ley de Snell en las 2 refracciones

$$① \quad n \,\text{sen}\,\theta_A = n' \,\text{sen}\,\theta_B$$

$$② \quad n' \,\text{sen}\,\theta_B = n \,\text{sen}\,\theta_A'$$

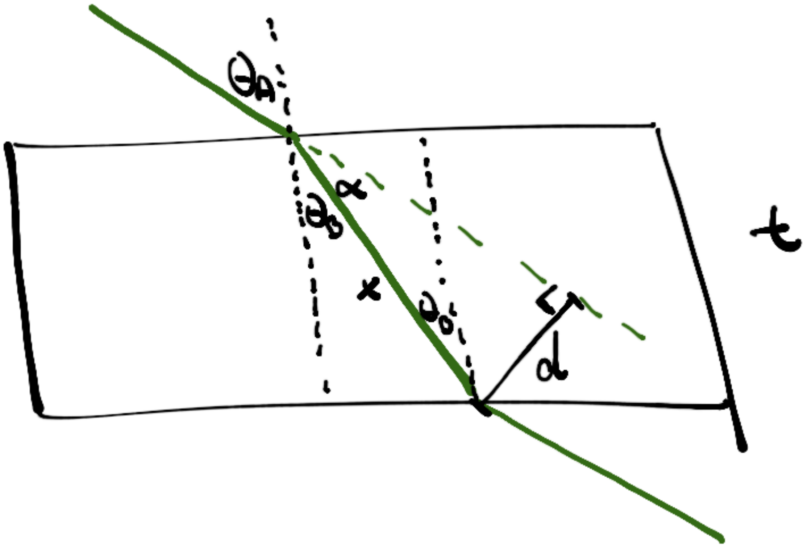
igualando

$n \,\text{sen}\,\theta_A = n \,\text{sen}\,\theta_A'$

$$\boxed{\theta_A = \theta_A'}$$

b) queremos demostrar que $d = t\,\dfrac{\text{sen}(\theta_A - \theta_B')}{\cos(\theta_B')}$

Dibujemos lo que tenemos:



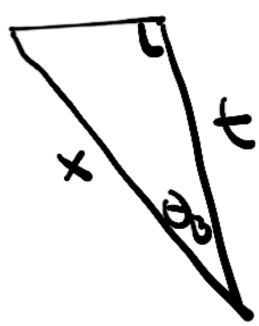
determinando α y x podemos obtener d,

$$\boxed{d = x \operatorname{sen}\alpha}$$

notemos que $\theta_A = \theta_B + \alpha$

$$\boxed{\theta_A - \theta_B = \alpha}$$

por otra parte



$\longrightarrow \quad x = \dfrac{t}{\cos\theta_B}$

luego usamos esto en d: $$\boxed{d = \underbrace{\frac{t}{\cos\theta_B}}_{x} \cdot \operatorname{sen}(\overbrace{\theta_A - \theta_B}^{\alpha})}$$